ΗΛΙΑΣΚΟΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΥΠΗΡΕΣΙΕΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΥΨΗΛΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

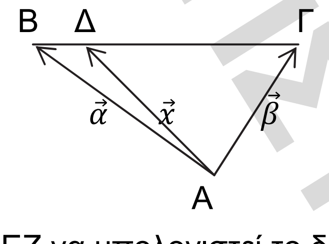
Θετικής - Τεχνολογικής Κατεύθυνσης
Μαθηματικά Β΄Λυκείου
Διανύσματα

Επιμέλεια: ΜΑΧΗ ΣΚΟΥΦΑ
ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΗΛΙΑΣΚΟΣ

e-mail: info@iliaskos.gr
www.iliaskos.gr

<u>ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ</u>

1. Να δείξετε ότι : $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}$
2. Να δείξετε ότι σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει :
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Delta}=\vec{0}$
3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε τέτοια ώστε $\overrightarrow{B\Delta}=\overrightarrow{\Gamma A}$ και $\overrightarrow{\Gamma E}=\overrightarrow{BA}$. Να αποδείξετε ότι το Α είναι μέσο του ΔΕ.
4. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ και τα σημεία Δ,Ε, τέτοια ώστε $\overrightarrow{M\Delta}=\overrightarrow{\Gamma A}$ και $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{BA}$.Να δείξετε ότι το Α είναι μέσον του ΔΕ.
5. Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Ε μέσο του ΒΔ.
   i) Αν για το σημείο Μ ισχύει:$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}=2\overrightarrow{ME}$ να δείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
   ii) Αν για το σημείο Κ ισχύει :$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{AK}$, να δείξετε ότι τα τμήματα ΒΓ και ΔΚ διχοτομούνται.
6. Έστω τα σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε. Να δείξετε ότι:$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{E\Delta}-\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.
7. Έστω τα σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε τέτοια ώστε να ισχύει: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{\Delta B}-\overrightarrow{E\Gamma}$. Να δείξετε ότι τα σημεία Δ,Ε συμπίπτουν.
8. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από τις κορυφές Α και Β φέρνουμε $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{B\Delta}$ και $\overrightarrow{BZ}=\overrightarrow{A\Gamma}$.Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Ζ,Γ,Δ και Ε είναι συνευθειακά και ότι τα ΕΖ και ΓΔ έχουν κοινό μέσο.
9. Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν Μ τυχαίο σημείο του επιπέδου του, να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{M\Delta}=4\overrightarrow{MO}$.
10. Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και το σημείο Ο για το οποίο ισχύει: $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{B\Delta}-\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.Να δείξετε ότι τα σημεία Ο,Α συμπίπτουν.
11. Αν ισχύει $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{M\Gamma}=\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{N\Gamma}$, να δείξετε ότι τα σημεία Μ και Ν ταυτίζονται.
12. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\overrightarrow{B\Delta}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\vec{x}=\frac{1}{4}(3\vec{\alpha}+\vec{\beta})$.



13. Στο κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ να υπολογιστεί το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ σαν συνάρτηση των $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}$. Κατόπιν να υπολογιστεί το διάνυσμα $\overrightarrow{BZ}$.
14. Έστω τυχαίο εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ. Να βρεθεί η θέση του σημείου Μ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{\Gamma E}+\overrightarrow{\Delta Z}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ZB}=\vec{0}$.
15. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Δ,Ε τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ. Αν για τα σημεία Μ,Ρ, ισχύει ότι $\overrightarrow{AM}+\lambda\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{A\Gamma},\ \overrightarrow{AP}+\kappa\overrightarrow{AE}=\kappa\overrightarrow{A\Delta}$ με κ,λ∈ R,να δείξετε ότι τα σημεία Α,Μ,Ρ είναι συνευθειακά.

16. Δίνονται τα σημεία Α,Β,Γ. Να δείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι σταθερό.
17. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να αποδειχθεί ότι το διάνυσμα $\vec{x} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{\Delta M}$ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο της θέσης του σημείου Μ.
18. Έστω τετράπλλευρο ΑΒΓΔ και Ε,Ζ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΓΔ. Να δείξετε ότι:$2\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma}$.
19. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ρ τυχαίο σημείο του επιπέδου.Να δείξετε ότι:$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{P\Gamma} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Delta}$.
20. Έστω κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$. Να υπολογιστούν τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta} \kappa\alpha\iota\, \overrightarrow{AE}$συναρτήσει των $\vec{\alpha}$και $\vec{\beta}$.Κατόπιν να δειχθεί ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AZ} = 6\overrightarrow{B\Gamma}$.
21. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε,Ζ της διαγωνίου ΑΓ, τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{Z\Gamma} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$.

    (i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$.

    (ii)Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.
22. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιορίστει το σημείο Μ τέτοιο ώστε να ισχύει:$\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{\Gamma M}$.
23. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ. Αν $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{M\Gamma}$,

    (i) να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{A\Gamma}}{3}$,

    (ii)να βρείτε τα κ και λ ώστε να ισχύει: $\kappa\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{A\Gamma} = 3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{B\Gamma}$.
24. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντιστοίχως. Να δειχτεί ότι: $\overrightarrow{\Delta E} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}$.
25. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να προσδιοριστεί το σημείο Μ τέτοιο ώστε να ισχύει:$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} = \vec{0}$.
26. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να αποδειχθει ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ το διάνυσμα $\vec{u} = 3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι σταθερό.
27. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει ότι:

    $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0\ \kappa\alpha\iota |\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{\beta}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{4}$ να δειχθεί ότι τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συγγραμικά.
28. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει ότι:

    $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0\ \kappa\alpha\iota |\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = \frac{|\vec{\gamma}|}{3}$ να δειχθεί ότι το $\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο του $\vec{\beta}$ και ότι το $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπο του $\vec{\gamma}$.

29. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη συγγραμικά διανύσματα. Αν υπάρχουν κ,λ,μ,ν∈ Rώστε να ισχύει $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \mu\vec{\alpha} + \nu\vec{\beta}$, να δειχθεί ότι κ=μ και λ=ν. Κατόπιν να

βρεθούν οι τιμές του x∈ R, ώστε τα $\vec{u} = (x+1)\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\,\kappa\alpha\iota\ \vec{v} = (3x-1)\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ να είναι συγγραμικά.

30. Έστω Ε,Ζ τα μέσα των $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{B\Gamma}$ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και Μ η τομή των $\overrightarrow{AZ}, \overrightarrow{\Delta E}$. Να δειχθεί ότι $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AZ}\kappa\alpha\iota\overrightarrow{\Delta M} = \frac{4}{5}\overrightarrow{\Delta E}$.
31. Αν τα σημεία Γ και Δ είναι διαφορετικά και ισχύουν $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Delta B} = x\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, να βρείτε το x.
32. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε,Ζ της ΑΓ ώστε:
$$\overrightarrow{A\Gamma} = 4\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{A\Gamma} = 4\overrightarrow{EZ}$$
   i. να δείξετε ότι το ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο
   ii. Αν για τα σημεία Κ,Λ ισχύουν: $2\overrightarrow{\Delta K} = \overrightarrow{Z\Delta}, 3\overrightarrow{\Delta\Lambda} = \overrightarrow{\Delta E}$,να δείξετε ότι τα σημεία Κ,Λ,Β είναι συνευθειακά.
33. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 2\vec{\alpha}$. Έστω Μ το σημείο τομής των διαγωνίων του.
   (i) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{B\Delta}$ ως γραμμικό συνδιασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
   (ii)Αν $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{BM} = \mu\overrightarrow{B\Delta}$, να βρείτε τα λ και μ.
34. Έστω τα Ο,Α,Β,Γ για τα οποία ισχύει $2\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{O\Gamma} = 7\overrightarrow{OA}$. Να δείξετε ότι τα Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.
35. Αν για τα σημεία Ο, Α, Β και Γ ισχύει ότι: $3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = 5\overrightarrow{O\Gamma}$, να αποδείξετε ότι:
   (i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.
   (ii)Να βρείτε τη σχετική θέση των Α, Β και Γ.
36. Έστω ότι ισχύει $2\lambda\overrightarrow{OA} - \lambda\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OB} + \lambda\overrightarrow{O\Gamma}$για κάθε λ∈ R.Να δείξετε ότι τα Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.
37. Αν ισχύει ότι $(\kappa+2)\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = (\kappa+5)\overrightarrow{M\Gamma}$ να δειχθεί ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.
38. Αν για τα σημεία Μ, Α, Β και Γ ισχύει: $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{M\Gamma} = \vec{0}$.
39. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα Μ,Κ μέσα των ΒΓ,ΑΓ αντίστοιχα. Έστω επίσης τα σημεία Ν και Ρ τέτοια ώστε $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}\kappa\alpha\iota\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BK}$. Να γραφεί το διάνυσμα $\overrightarrow{NP}$ σαν γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{B\Gamma}$.
40. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε στην πλευρά ΑΓ σημείο Δ τέτοιο, ώστε να είναι $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$. Αν Ε είναι το μέσο του ΒΔ και φέρουμε $\overrightarrow{\Delta Z} \parallel \overrightarrow{AE}$, να δείξετε ότι το Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.
41. Αν οι διανυσματικές θέσεις των σημείν Α, Β, Γ και Δ είναι αντίστοιχα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $4\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, να δείξετε ότι: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.
42. Δίνονται τα διαφορετικά σημεία Α, Β και $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης αυτών. Αν ισχύει $3\overrightarrow{A\Gamma} + 2\overrightarrow{\Gamma B} = \vec{0}$, να βρείτε
   (i) το διάνυσμα θέσης του σημείου Γ και
   (ii)τη σχετική θέση των σημείων Α, Β και Γ.

43. Αν το διάνυσμα $\vec{\nu}$ είναι μοναδιαίο και $\vec{\alpha} = 2\vec{\nu} - 3\vec{\upsilon}$ και $\vec{\beta} = 5\vec{\nu} - 2\vec{\upsilon}$, να αποδείξετε ότι τα διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ είναι αντίρροπο του $\vec{\nu}$ και να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

44. Αν $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma} = 6\vec{\beta} - \vec{\alpha}$, να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

45. Αν οι διανυσματικές θέσεις των σημείων Α, Β και Γ ως προς σημείο Ο είναι αντίστοιχα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $5\vec{\alpha} + 9\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

46. Αν τα διανύσματα θέσης των σημείων Α, Β και Γ ως προς το σημείο Ο είναι $\vec{x} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, $\vec{y} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$ και $\vec{z} = 4\vec{\alpha} + 7\vec{\beta} + 10\vec{\gamma}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

47. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ τα διανύσματα θέσης των σημείων Α, Β και Γ ως προς το σημείο Ο αντίστοιχα.
(i) Να βρείτε το διάνυσμα θέσης του σημείου:
α) Δ
β) Ε, το οποίο είναι το μέσον του ΑΔ
γ) Ζ, για το οποίο ισχύει $2\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{Z\Gamma}$.
(ii) Να αποδείξεται ότι τασημεία Β, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

48. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα διανύσματα θέσης $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ των σημείων Α, Β και Γ ως προς το σημείο Ο αντίστοιχα.
(i) Να βρείτε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ το διάνυσμα θέσης:
α) του σημείου Ε για το οποίο ισχύει: $3\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{A\Gamma}$
β) του σημείου Δ που είναι μέσον της διαμέσου ΑΜ.
(ii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Δ και Ε είναι συνευθειακά.

49. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ,Ε,Ζ τέτοια ώστε να ισχύει $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AZ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{B\Gamma}$. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$, $\overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$. Κατόπιν να δείξετε ότι τα σημεία Δ,Ε,Ζ είναι συνευθειακά.

50. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος το ΑΜ. Πάνω στα τμήματα ΑΒ, ΑΜ και ΑΓ παίρνουμε τα σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα ώστε $A\Delta = \frac{1}{2}AB$, $AE = \frac{1}{3}AM$ και $AZ = \frac{1}{4}A\Gamma$.
(i) Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$.
(ii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Ζ και Ε είναι συνευθειακά.

51. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσον Ζ της διαμέσου του ΑΜ. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$ και για τα σημεία Δ και Ε ισχύει: $\overrightarrow{A\Delta} = 3\overrightarrow{\Delta B}$ και $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{E\Gamma}$.

(i) Να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$.
(ii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Ζ και Ε είναι συνευθειακά.

52. Αν ισχύει $\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{BK}-2\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AM}$ να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\Lambda K}$ $και$$\overrightarrow{KM}$είναι ομόρροπα.

53. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ,Ε,Ζ ώστε $\overrightarrow{A\Delta}=\lambda\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{B\Gamma},\overrightarrow{\Gamma Z}=\lambda\overrightarrow{\Gamma A}$.Νας δειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν τοίδιο κέντρο βάρους.

54. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Α΄,Β΄,Γ΄ τρα μέσα των ΒΓ,ΑΓ,ΑΒ αντίστοιχα.Αν G το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ να δειχθεί ότι για κάθε σημείο Μ:

α) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AA'}=3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{BB'}=3\overrightarrow{M\Gamma}+2\overrightarrow{\Gamma\Gamma'}$

β) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma}=\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{G\Gamma'}$

γ)$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=3\overrightarrow{MG}$

55. Αν G και G΄ είναι τα κέντρα βάρους των τετραέδρων ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄, να αποδείξετε ότι αληθεύει η ισότητα:

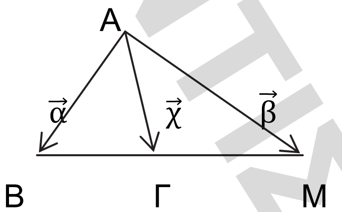
$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{\Gamma\Gamma'}+\overrightarrow{\Delta\Delta'}=\overrightarrow{GG'}$$

56. α) Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x}$είναι οι διανυσματικές ακτίνες των συνευθειακών Α,Β,Μ αντίστοιχα και ισχύει ότι $\frac{(MA)}{(MB)}=\frac{\kappa}{\lambda}$, να δειχθεί ότι $\vec{x}=\frac{\lambda\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}}{\lambda+\kappa}$ με δεδομένο ότι το Μ είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

β)Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\frac{(AB)}{(A\Gamma)}=\frac{2}{3}$ να γραφεί το διάνυσμα της εσωτερικής διχοτόμου $\overrightarrow{A\Delta}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}$.

57. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$ οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων Α, Β και Γ αντίστοιχα ως προς το σημείο Ο, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma B}$ με τη βοήθεια των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

58. Αν στο διπλανό σχήμα είναι $\frac{BM}{M\Gamma}=\frac{3}{2}$, να γράψετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.



59. Έστω Κ,Λ δύο διαφορετικά σημεία και οι σχέσεις κ+λ+μ=0, $\kappa\overrightarrow{KA}+\lambda\overrightarrow{KB}+\mu\overrightarrow{K\Gamma}=\vec{0}$ και $\kappa\overrightarrow{\Lambda A}+\lambda\overrightarrow{\Lambda B}+\mu\overrightarrow{\Lambda\Gamma}=\vec{0}$. Να αποδειχθεί ότι αν ισχύουν δύο από τις παραπάνω προτάσεις ισχύει και η τρίτη.

60. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ,Ε τέτοια ώστε $\overrightarrow{A\Delta}=\kappa\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\kappa\overrightarrow{A\Gamma}$. Να δειχθεί ότι ΔΕ∥ $B\Gamma$.Κατόπιν να βρεθεί η σχέση μεταξύ των κ,λ ώστε τα σημεία Β,Γ,Δ,Ε να σχηματίζουν παραλληλόγραμμο.

61. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$είναι ανά δύο μη συγγραμμικά και ισχύουν $\vec{\alpha} \parallel (\vec{\beta} + \vec{\gamma}), \vec{\beta} \parallel (\vec{\alpha} - 2\vec{\gamma})$ να δειχθεί ότι $\vec{\gamma} \parallel (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$.
62. Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημεία Ε,Ζ τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{EB}$ και $\overrightarrow{\Delta Z} = \lambda\overrightarrow{Z\Gamma}$. Να δειχθεί ότι τα μέσα των ΑΔ,ΕΖ,ΒΓ είναι συνευθειακά.
63. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε,Ζ τέτοια ώστε να ισχύουν $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma Z} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Αν Μ είναι το σημείο τομής των ΒΖ και ΔΕ να γραφεί το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$.
64. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε σημείο για το οποίο $\overrightarrow{E\Gamma} = \kappa\overrightarrow{BE}$.Αν Μ είναι το σημείο τομής των ΑΕ και ΒΔ να δειχθεί ότι ισχύει: (κ+2)$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A\Delta} + (\kappa + 1)\overrightarrow{AB}$.
65. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ που οι πλευρές του ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Ε και οι ΒΓ και ΑΔ τέμνονται στο Ζ. Αν $\overrightarrow{EA} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{EB} = \kappa\vec{\alpha}, \overrightarrow{E\Delta} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{E\Gamma} = \lambda\vec{\alpha}$ τότε:
   α) Να εκφραστούν συναρτήσει των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \kappa, \lambda$ οι διανυσματικές ακτίνες ως προς το Ε των μέσων των ΒΔ, ΑΓ και ΕΖ.
   β) Να αποδειχθεί ότι τα τρία αυτά μέσα είναι συνευθειακά.
66. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της Ευθείας ΒΓ ώστε τα Δ και Γ να βρίσκονται εκατέρωθεν του Β και να ισχύει: $3B\Delta = 2B\Gamma$. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta}$ συναρτλησει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
67. Να αποδειχθεί ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα μέσα των απέναντι πλευρών και τα μέσα των διαγωνίων ενός τετραπλεύρου διχοτομούνται.
68. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ρ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{P\Gamma} = -2\overrightarrow{PB}$. Να δειχθεί ότι $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{\Delta P} = 2\overrightarrow{AB}$.
69. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{P\Gamma}$. Αν $2\overrightarrow{PA} - 3\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$, να δείξετε ότι τα Α,Β και Γ είναι συνευθειακά.
70. Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του. Να αποδειχθεί ότι το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.
71. Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ του παραλληλόγραμου ΑΒΓΔ, να δειχτεί ότι οι ΑΛ και ΓΚ διαιρούν τη διαγώνιο ΔΒ σε τρία ίσα μέρη.
72. Έστω κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ. Να δειχθεί ότι:
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AZ} = 3\overrightarrow{A\Delta}.$$
73. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιοριστεί σημείο Μ τέτοιο ώστε να ισχύει $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = \vec{0}$.
74. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ,Ε,Ζ για τα οποία ισχύουν: $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Delta B}, \overrightarrow{\Gamma E} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{BZ} = \frac{4}{3}\overrightarrow{B\Gamma}$. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{AZ}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Στην συνέχεια να δείξετε ότι το ΑΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

75. Αν ισχύει ότι $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{M\Gamma} = 0$ να δείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

76. Δίνεται τρίγωνο ΟΑΒ και σημείο Γ. Αν ισχύει ότι $\overrightarrow{O\Gamma} = (1-\kappa)\overrightarrow{OA} + \kappa\overrightarrow{OB}$ να δείξετε ότι τα Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

77. Αν ισχύει ότι $2\overrightarrow{A\Lambda} + 3\overrightarrow{B\Lambda} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$, να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα$\overrightarrow{\Lambda K}$ και $\overrightarrow{KM}$ είναι αντίρροπα.

78. α)Έστω ότι $\kappa\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0}$ με κ+λ+μ=0 και $|\kappa| + |\lambda| + |\mu| \neq 0$. Να δειχθεί ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά και αντιστρόφως.
β) Αν ισχύει (1-συν2α)$\overrightarrow{OA}$+(2συν^{2}α)$\overrightarrow{OB}$-2$\overrightarrow{O\Gamma}$=$\vec{0}$, να δειχθεί ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

79. Έστω το μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και το σημείο Γ τέτοιο ώστε να ισχύουν : $\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\overrightarrow{AB} \kappa\alpha\iota\, \overrightarrow{B\Gamma} = \mu\overrightarrow{AB}$. Να δειχθεί ότι λ-μ=1.

80. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ,Ε για τα οποία ισχύει ότι $\overrightarrow{A\Delta} = \lambda\overrightarrow{B\Gamma} \kappa\alpha\iota\, \overrightarrow{BE} = \kappa\overrightarrow{A\Gamma}$, όπου κ,λ∈ $R - \{0\}$ με κλ=1.
α) Να δειχθεί ότι τα σημεία Δ,Ε,Γ είναι συνευθειακά.
β) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε το Γ να μην ανήκει στο τμήμα ΔΕ.

81. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε,Ζ τέτοια ώστε να ισχύουν $\overrightarrow{AE} = \kappa\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AZ} = \lambda\overrightarrow{AB}$ με κ,λ∈ $R - \{0\}$. Αν είναι $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = 1$, να αποδειχθεί ότι τα σημεία Ε,Γ,Ζ είναι συνευθειακά.

82. Δίνονται τα μη συγγραμμικά ανά δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$. Αν ισχύει $\vec{\alpha} \parallel (\vec{\beta} + \vec{\gamma}), \vec{\beta} \parallel (\vec{\alpha} + \vec{\gamma}) \nu.\delta.o\, \vec{\gamma} \parallel (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.

83. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΑΜ. Έστω σημεία Δ,Ε,Ζ τέτοια ώστε $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{3}{5}\overrightarrow{\Delta B}, \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{E\Gamma}$ και $\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{ZM}$. Να δείξετε ότι τα σημεία Δ,Ε,Ζ είναι συνευθειακά.

84. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Ε,Ζ τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AZ} = \lambda\overrightarrow{A\Delta}$. Να βρεθεί ο λ∈ $R - \{0\}$ αν τα σημεία Β,Ζ,Εείναι συνευθειακά.

85. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα Κ, Λ τέτοια ώστε να ισχύουν $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Lambda} = 3\overrightarrow{\Lambda\Gamma}$. Να δείξετε ότι τα μέσα των ΑΔ, ΚΛ και ΒΓ είναι συνευθειακά.

86. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ για το οποίο ισχύουν: $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{BM} = \lambda\overrightarrow{A\Gamma} + \mu\overrightarrow{BA}$. Να δειχθεί ότι το Μ είναι μέσο της ΒΓ.

87. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε,Ζ των ΑΒ,ΒΓ αντίστοιχα. Αν Μ το σημείο τομής των ΑΖ, ΔΕ να δειχθεί ότι:
$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AZ}\ \kappa\alpha\iota\ \overrightarrow{\Delta M} = \frac{4}{5}\overrightarrow{\Delta E}$$

88. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ,Ε τέτοια ώστε$\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}$. Αν Κ το σημείο τομής των ΒΕ και ΓΔ να δειχθεί ότι $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{A\Gamma} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$.

89. Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Μ. Αν $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta}$να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία είναι
α) $\vec{u}$ αντίρροπο του $\vec{v}$ β)$|\vec{u}| = |\vec{v}|$.
90. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ε,Ζ τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AZ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A\Gamma}$.
91. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και το σημείο Κ της ΒΓ ώστε να ισχύει : $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AB} + (x-1)\overrightarrow{A\Gamma}, x \in R$. Να βρεθεί ο x και να δείξετε ότι $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB}$.
92. Αν ισχύει η ισότητα $\overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{BK} - 2\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B\Lambda} + 3\overrightarrow{AM}$, να δείξετε ότι τα σημεία Κ,Λ,Μ είναι συνευθειακά.
93. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος ΑΜ. Αν $5\overrightarrow{A\Delta} - 3\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}$ και $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{EM}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Δ και Ε είναι συνευθειακά.
94. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί το σημείο Κ του επιπέδου του τριγώνου τέτοιο ώστε: $2\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} - 3\overrightarrow{K\Gamma} = \vec{0}$.
95. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ διάμεσός του. Αν ισχύει $\kappa\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{A\Gamma} = 3\overrightarrow{B\Gamma} + 2\overrightarrow{AM}$, να βρείτε τα κ και λ.
96. Αν ισχύει $3\overrightarrow{OA} - 8\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0}$,
(i) να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά και
(ii) να βρείτε τη σχετική θέση των Α, Β και Γ.

97. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}, \overrightarrow{OB} = 5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{O\Gamma} = 13\vec{\alpha} + 7\vec{\beta} + 10\vec{\gamma}$. Να δείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.
98. Δίνεται το κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Μ,Ν , τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΒΓ αντιστοίχως. Αν 2(ΜΝ)=(ΑΒ)+(ΓΔ), να δείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο ή παραλληλόγραμμο.
99. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \overrightarrow{A\Gamma} = 5\vec{\alpha} + 9\vec{\beta}$ και σημείο Ρ του επιπέδου τέτοιο ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AP} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, να δείξετε ότι το σημείο Ρ είναι σημείο της ΒΓ.
100. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Δ το μέσο της ΑΒ, Ε σημείο της ΑΓ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{E\Gamma}$ και Ρ το μέσο του ΔΕ. Να εκφράσετε το $\overrightarrow{AP}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$.
101. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} \kappa\alpha\iota \vec{\beta}$. Αν για τα διανύσματα $\vec{u} \kappa\alpha\iota\ \vec{v}$ ισχύουν:

$$2\vec{u} + 14\vec{\beta} = 21\vec{\alpha} + \vec{v}\ \kappa\alpha\iota\ 3\vec{u} + 5\vec{v} = 6\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$$

να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} \kappa\alpha\iota\ \vec{v}$ είναι αντίρροπα.
102. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\alpha} - \frac{2}{3}\vec{\beta} + \vec{\gamma}$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - \frac{8}{3}\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά.
103. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \frac{4}{3}\vec{\gamma}$ και $\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{\alpha} - \frac{3}{4}\vec{\beta} + \vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά.

104. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 2α.

α) Να βρείτε το σημείο Ο για το οποίο ισχύει: $2\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{0}$

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει:

$$\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}\right|=2\alpha$$

105. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΓΔ με $\left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right|=3$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ ώστε $3\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{M\Gamma}\right|$.

106. Δίνεται τετρλάπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{M\Gamma}-\overrightarrow{M\Delta}\right|.$$

107. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}+2\overrightarrow{M\Delta}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}-2\overrightarrow{M\Delta}\right|.$$

108. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{M\Delta}\right|.$$

109. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει: $\lambda\overrightarrow{M\Gamma}-\overrightarrow{AB}=(\lambda-1)\overrightarrow{MB}$.

110. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Δ μέσον του ΑΒ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, για τα οποία ισχύει:

$$\overrightarrow{MA}+2\lambda\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{\Delta M}+2\lambda\overrightarrow{AB}.$$

111. Δίνονται τα σημεία Α(-4,-2),Β(-1,3) και Γ(2-α,β+1). Να βρεθούν:

α) Οι αποστάσεις των Α,Β,Γ από τους άξονες.

β) Τα συμμετρικά του Γ ως προς τους άξονες χχ΄,yy΄.

γ) Να υπολογιστούν τα α,β ώστε το συμμετρικό του Γ ως προς Β να συμπίπτει με το συμμετρικο του Α ως προς τον άξονα χχ΄.

112. Έστω διάνυσμα $\vec{\alpha}=(\lambda^2+\lambda-2,\lambda^2+5\lambda+6)$. Να βρεθούν τα λ∈R, ώστε:

α) $\vec{\alpha}=\vec{0}$, β) $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\vec{\alpha}\parallel xx'$, γ) $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\vec{\alpha}\parallel yy'$

113. Στο επίπεδο Οxy δίνονται τα σημεία Α(2,0) και Β(3,2). Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ του παραλληλογράμμου ΟΑΒΓ.

114. Δίνονται τα σημεία Α(-1,2) και Β(-3,0). Να βρείτε σημείο Γ του επιπέδου Οxy τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισόπλευρο.

115. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(4,-2)$ και $\vec{\beta}=(-4,3)$. Να βρεθεί το διάνυσνα $\vec{v}$ έτσι ώστε:

α) $\vec{v}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, β) $2\vec{v}-3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}=0$, γ) $\vec{v}$ ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ και $|\vec{v}|=|\vec{\beta}|$.

116. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(3x,3)$ και $\vec{v}=(-4,-x)$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του x∈R , ώστε το $\vec{u}+2\vec{v}$ να είναι ομόρροπο του $3\vec{u}+5\vec{v}$.

β) Για ποιές από τις παραπάνω τιμές του x∈R είναι το $\vec{u}$ αντίρροπο του $\vec{v}$.

γ) Για την παραπάνω τιμή του χ, να βρεθεί διάνυσμα συγραμμικό με το $\vec{u}$ που να έχει μέτρο το μισό του $|\vec{v}|$.

117. Δίνονται τα σημεία Α(2,6) και Β(8,-4). Να βρείτε σημεία Μ,Ν τέτοια ώστε να ισχύουν $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{NB}$

118. Δίνονται τα σημεία Α(-2,-2), Β(3,0), Γ(-1,3). Να βρείτε τα μήκη των πλευρών και τα μήκη των διαμέσων του τριγώνου ΑΒΓ.

119. Αν τα σημεία Κ(4,0),Λ(6,2) και Μ(3,5) είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ,ΒΓ,ΑΓ αντιστοίχως του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου.

120. Αν Κ(2,3),Λ($-\frac{1}{2}$,3),Μ($-\frac{1}{2}$,1), Ν(1,0),Ρ(3,1) είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΕ και ΕΑ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του.

121. Δίνονται τα σημεία Α(2,5) και Β(-1,-1).Να βρεθεί σημείο:
α)του χχ΄που ισαπέχει από τα Α,Β.
β) του yy΄ που ισαπέχει από τα Α,Β.
γ) του επιπέδου που σχηματίζει ισόπλευρο τρίγωνο με τα Α,Β.

122. Δίνονται τα σημεία Α(2,0),Β(3,2). Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Γ έτσι ώστε τα Α,Β,Γ και η αρχή των αξόνων να σχηματίζουν παραλληλόγραμμο.

123. Δίνονται τα σημεία Β(3,2),Γ(5,-4).Να βρεθεί το σημείο Α του χχ΄ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι: α) ισοσκελές με κορυφή το Α,β)ορθογώνιο στο Α. Κατόπιν να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του περιγεγγραμένου κύκλου στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ της δεύτερης περίπτωσης.

124. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(5,1),Β(1,-3) και Γ(9,-7). Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ και το σημείο Δ τέτιο ώστε $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AM}$, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Δ και αν η ΒΔ τέμνει την ΑΓ στο Ε, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Ε.

125. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(-1,2),Β(2,3) και Γ(4,1). Αν ΑΜ διάμεσος και Θ το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, να βρείτε τα σημεία Μ,Θ.

126. α) Να εξεταστεί αν τα Α(0,2),Β(1,1),Γ(α,2-α) είναι συνευθειακά.
β) Αν τα Α(α,-6)Β(3,2)Γ(-α,-10) είνα συνευθειακά να βρεθεί ο α$\in R$.

127. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(2x-y,x+2y-4),$\vec{\beta}$=(x-3y+2,-3x+2y-2),$\vec{\gamma}$=(3,-2), $\vec{\delta}$=(-3,4) και το διάνυσμα $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$.
α) Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των x,y έτσι ώστε $\vec{v} \parallel \vec{\delta}$.
β) Να υπολογιστούν τα x,y έτσι ώστε $\vec{v} = \vec{0}$.

128. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(-1,2),$\vec{\beta}$=(-2,5) και $\vec{\gamma}$=(0,-1).
α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.
β) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ σε δύο συνιστώσες παράλληλες στα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

129. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(λ-2,1) και $\vec{\beta}$=(-8,4-2λ).
α) Να βρείτε το λ ώστε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.

β) Για λ=5, να βρεθεί διάνυσμα που είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ και έχει μέτρο διπλάσιο του $\vec{\beta}$.

130. Να βρείτε τις τιμές του μ ώστε τα σημεία Α(-3,1),Β(μ,3),Γ(-5,1-μ) να είναι κορυφές τριγώνου.

131. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(-1,2) και $\vec{\beta}$=(3,1). Να βρεθούν τα διάνυσματα:
α) $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ β) $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} - \vec{v}$
γ) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ όταν: 2($\vec{\alpha} - \vec{x}$)-3$\vec{\beta}$=$\vec{x} - \vec{\alpha}$.

132. Αν Α(1,-3) και Β(-2,1) να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v} = 2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}$.

133. Αν τα διανύσματα θέσης των σημείων Α,Β ως προς το Ο είναι τα $\vec{\alpha}$=(1,-2), $\vec{\beta}$=(-3,0) αντίστοιχα, να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v} = -3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$

134. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(κ-1,λ-2) και $\vec{\beta}$=(λ,2κ-1) .Να βρείτε τα κ,λ ώστε:
α) το $\vec{\alpha}$ να είναι το μηδενικό διάνυσμα.
β) τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ να είναι ίσα.
γ) τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ να είναι αντίθετα.

135. Αν $\vec{v}$=(α-1,-2), $\vec{w}$=(β-2, α), να βρείτε τα α,β ώστε:
α)$\vec{v} = \vec{w}$
β) $3\vec{v} - 2\vec{w} = \vec{0}$.

136. Έστω το σημείο Α(-2,3). Να βρείτε το σημείο:
α) Β, όταν τα Α,Β είναι συμμετρικά ως προς Κ(0,1)
β) Β, όταν τα Α,Β είναι αντιδιαμετρικά σημεία κύκλου με κέντρο Κ(-1,0).

137. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων οι τεταγμένες δύο σημείων Ακαι Β είναι οι ρίζες της εξίσωσης x^2-(λ^3-2)x-2=0. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε το μέσον του τμήματος ΑΒ να έχει τεταγμένη ίση με 3.

138. Αν Α(-2,1),Β(3,-2) και ισχύει $2\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{BM} = \vec{0}$, να βρείτε τις συντεταγμένες του Μ.

139. Αν το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ με Α(1,2),Β(-1,0) είναι το Κ(0,3) να βρείτε τα Γ,Δ.

140. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Α(1,-2),Δ(2,2). Αν το Β ανήκει στον xx΄ και το κέντρο Κ στον yy΄ να βρείτε τις συντεταγμένες των Β,Κ και Γ.

141. Αν $\vec{\alpha}$=(-1,2) και $\vec{\beta}$=(3,-2) να υπολογίσετε το:
α) $|-2\vec{\alpha}|$
β) $|3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$

142. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$ για το οποίο ισχύει:
$\vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 4{,}8)$

143. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$ για το οποίο ισχύει:
$\vec{\alpha} = (-4, -2) + |\vec{\alpha}|(1{,}1)$

144. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανύσματων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\alpha} = \left(|\vec{\beta}|, 2\sqrt{2}\right) \kappa\alpha\iota\ \vec{\beta} = (|\vec{\alpha}| - 4{,}0)$

145. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ διάμεσος . ΑΝ Α(-1,3),Β(-2,-3) και Γ(2,4), να βρείτε

α) τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{AM}$

β)το $|\overrightarrow{AM}|$

146. Δίνονται τα Α(1,2),Β(κ,0) και Γ(0,-κ). Να βρείτε τις τιμές του κ ώστε $|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{B\Gamma}|=|\overrightarrow{A\Gamma}|$.

147. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(3,-1),$\vec{\beta}$=(-2,1) και $\vec{\gamma}$=(12,-5)

α) Να αποδείξετε ότι τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά

β) να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

148. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(λ-1,κ),$\vec{\beta}$=(κ,2-2λ) και $\vec{\gamma}$=(1,5).

α)Να βρείτε τα κ,λ ώστε τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$να είναι συγγραμμικά.

β)Για λ=2 και κ=-1 να αναλύσετε το $\vec{\gamma}$ σε δύο συνιστώσες παράλληλες στα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

149. Να βρείτε διάνυσμα αντίρροπο του $\vec{\alpha}$=(1,4) με μέτρο $\sqrt{17}$.

150. Δίνονται τα σημεία Α(λ-1,-2),Β(-1,0),Γ(λ-3,2λ)

α)Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε τα Α,Β,Γ να είναι κορυφές τριγώνου.

β)Για λ=-1,να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

151. Έστω Οxy σύστημα συντεταγμένων και τα σημεία Α(1,3),Β(5,1). Αν $4\overrightarrow{O\Gamma}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ και Μ μέσον του ΑΒ

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\overrightarrow{O\Gamma}$ και $\overrightarrow{OM}$

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο,Γ,Μ είναι συνευθειακά

γ) Να βρείτε το λ, όταν $\overrightarrow{O\Gamma}=\lambda\overrightarrow{\Gamma M}$

152. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του $\overrightarrow{AB}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Α(-1,3),Β(2,-3) ii)Α(3,1),Β(-5,1) iii)Α(-2,3),Β(-2,7)

153. Αν φ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον xx΄, να βρείτε τον συντελεστη διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) φ=$\frac{\pi}{6}$ii) φ=120^{o}iii)φ=$\frac{3\pi}{4}$iv) φ=0.

154. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει με τον άξονα xx΄ το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ σε κάθε περίπτωση αν:

i) Α(3,0),Β(0,-$\sqrt{3}$) ii)Α(0,3),Β(2,3) iii)Α(2,1),Β(1,1+$\sqrt{3}$).

155. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(2,2) και $\vec{\beta}$=(1,-$\sqrt{3}$)

α) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει καθένα από τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με τον άξονα xx΄

β) Να βρείτε την γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$.

156. Δίνονται τα σημεία Α(μ-3,2),Β(3μ,μ-3). Να βρείτε το μ ώστε το $\overrightarrow{AB}$ να σχηματίζει με τον xx΄γωνία $\frac{7\pi}{4}$.

157. Δίνονται τα σημεία Α(μ-1,2) και Β(2,3μ). Να βρείτε το μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ να σχηματίζει με τον άξονα xx΄γωνία $\frac{3\pi}{4}$ και να είναι παράλληλο στο $\overrightarrow{AB}$.
158. Δίνονται τα σημεία Α(3x,y) και Β(4x+3y,2y). Να βρείτε τα x,y έτσι ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ να σχηματίζει με τον xx΄ γωνία 135^o και να έχει μέτρο $2\sqrt{2}$.
159. Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ έχουν συντελεστή διεύθυνσης τις ρίζες της εξίσωσης x^2-2(λ-1)x-λ+1=0. Να βρείτε το λ ώστε τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ να είναι συγγραμμικά.
160. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθει ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία το διάνυσμα $\vec{v}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$.
161. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οπία ισχύει $3\left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{M\Gamma}\right|$.
162. Να βρεθεί το σημείο Μ του άξονα xx΄ώστε το άθροισμα των αποσάσεων του από τα σημεία Α(1,2)και Β(3,6) να γίνεται ελάχιστο.
166. Δίνονται τα σημεία Α(-1,2), Β(1,-2) και Γ(2,3). Να βρείτε σημείο Μ στον άξονα yy΄ ώστε η παράσταση d=$\left|\overrightarrow{MA}\right|^2+\left|\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{M\Gamma}\right|^2$ να παίρνει την ελάχιστη τιμή.
167. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=3$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{3\pi}{4}$. Να υπολογισθεί το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
168. Έστω τρία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\gamma}|=4$, $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$, $\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)=\frac{\pi}{3}$ και $\left(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\alpha}}\right)=\frac{2\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

(i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ (ii) $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\gamma}$ (iii) $\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2$

(iv) $\left(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\right)\cdot\left(3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)$ (v) $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)$

169. Να υπολογισθεί η γωνία των διανυσματων $\vec{\alpha}=(-1,-2)$ και $\vec{\beta}=(3,1)$.
170. Να βρεθούν τα διανύσματα εκείνα τα οποία είναι κάθετα στο διάνυσμα $\vec{\alpha}=(-3,-4)$ και έχουν μέτρο ίσο με 5.
171. Αν $\vec{\alpha}=(-1,1)$ και $\vec{\beta}=(1+\sqrt{3},1-\sqrt{3})$, να βρεθεί η γωνία θ που σχηματίζουν.
172. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α (4,3), Β (1,2) και Γ (6,7). Να υπολογισθεί η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου.
173. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 2, για το οποίο είναι $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\Gamma A}=\vec{\gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=-6$.
174. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{4\pi}{3}$. Αν $\vec{\delta}=3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, να υπολογισθεί η γωνία $\varphi=\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\delta}}\right)$.
175. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=\frac{1}{3}$, $|\vec{\beta}|=\frac{2}{3}$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

Αν $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ να υπολογισθεί η γωνία θ=$(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\alpha}})$.

176. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta} \neq \vec{0}$,$\vec{\alpha} < \vec{\beta}$ και συν$\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$=$\frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$, να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$.

177. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Να δείξετε ότι $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\alpha}^2}\vec{\alpha}$.

178. Να αποδείξετε ότι: i)$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

ii) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \leftrightarrow |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$

179. Έστω δύο διανύσματα με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{2\pi}{3}$.Αν είναι $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, να υπολογισετε:i)το $|\vec{v}|$, ii) τις γωνίες$(\widehat{\vec{\alpha},\vec{v}})$, $\left(\widehat{\vec{v},\vec{\beta}}\right)$

180. Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$για τα οποία ισχύουν $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$,$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και$|2\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 7$.

181. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{v}$=(10,5) σε δύο συνιστώσες, μία παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}$=(3,4) και μία κάθετη προς αυτό.

182. Δίνεται τρίγωνο ΟΑΒ στο οποίο είναι $|\overrightarrow{OA}| = 2$,$|\overrightarrow{OB}| = 4$,$\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) = \frac{\pi}{3}$Αν Μ μέσο τηςΑΒ, να υπολογίσετε την γωνία $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}\right)$.

183. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\vec{\alpha}$ αν είναι $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $|\vec{\gamma}| = 4$και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$

184. Αν Δ,Ε,Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ,ΓΑ,ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ, να δείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma A} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma Z} = 0$.

185. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{A\Gamma} = 2\overrightarrow{AB}$.ΑΝ Ε είναι το μέσο της ΑΓ και Ζ είναι σημείο της ΒΓ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{BZ} = 2\overrightarrow{Z\Gamma}$, να δείξετε ότι η γωνία $B\hat{E}Z$ είναι ορθή.

186. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο(ΑΒ=ΑΓ) φέρνουμε το ύψος ΒΔ. Να δείξετε ότι $(B\Gamma)^2=2(A\Gamma)(\Gamma\Delta)$.

187. ΟΙ διάμεσοι ΒΕ και ΓΖ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ(ΑΒ=ΑΓ) τέμνονται κάθετα. Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{A}$.

188. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ όπου το $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο, $|\vec{\beta}| = 2 \; \kappa\alpha\iota \; \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 120^o$. Να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων: $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}$.

189. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(1,2),Β(2,2+$\sqrt{3}$),Γ(-2$\sqrt{3}, 8 - \sqrt{3}$). Αν ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ να υπολογίσετε την γωνία $B\hat{A}M$.

190. Να βρείτε την ποροβολή του διανύσματος $\vec{\alpha} = (-1,2)$ πάνω στο $\vec{\beta} = (3,1)$.

191. Δίνονται τα διανύσματα$\vec{\alpha} = (4,-3)$και $\vec{\beta} = (1,-2)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να έχει την διεύθυνση του $\vec{\beta}$,

192. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με$|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$και $|\vec{\gamma}| = 3$. Αν $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ να υπολογίσετε την παράσταση $A = \vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} - 3\vec{\gamma}\vec{\alpha}$

193. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ισχύουν: $\frac{|\vec{\alpha}|}{2} = \frac{2|\vec{\beta}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{5}$ και $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ να δείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha} = -\frac{4}{3}\vec{\beta}$ ii) $\vec{\beta} \parallel \vec{\gamma}$

194. Αν$|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{2\pi}{3}$

i) να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} - \vec{\beta} \neq \vec{0}$

ii) να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ώστε: $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$και $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} - \vec{x})$ και μετά την $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{x}$.

195. Δίνονται τα σταθερά σημεία Α και Β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει:$\left|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{\overrightarrow{MA}^2 + 4\overrightarrow{MB}^2}$.

196. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διάμεσος του. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{M\Delta} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M\Delta} \cdot \overrightarrow{\Gamma A}$

197. Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο,$|\vec{\beta}| = 2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{2\pi}{3}$να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα: i)$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

ii)$(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ iii)$(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2$

198. Αν$|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{2}$ να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} = \left(\overrightarrow{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right) + 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

199. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$είναι μοναδιαία και ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$=1 να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

200. Αν$|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 60^o$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ να υπολογίσετε το

i) $|\vec{\gamma}|$ ii)$\vec{\alpha}\vec{\gamma} + \vec{\beta}\vec{\gamma}$

201. Αν$|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{5}$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 120^o$και $\vec{v}$=$\overrightarrow{2\alpha} + \vec{\beta}$ να υπολογίσετε: i) $|\vec{v}|$ ii) τις γωνίες $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{v}})$, $\left(\widehat{\vec{v}, \vec{\beta}}\right)$

202. Αν$|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{4}$ να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} - \vec{\beta}, \vec{\beta}$

203. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$είναι μοναδιαία και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 120^o$ να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} \kappa\alpha\iota\ \vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$

204. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$είναι μοναδιαία και $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\vec{u} = -7\vec{\alpha} + 8\vec{\beta}$ είναι κάθετα να βρείτε την γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

205. Έστω τα διανύσματα$\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και$|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 60^o$και το τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

206. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών ενός παραλληλογράμμου που κατασκευάζεται με τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} \kappa\alpha\iota\ \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, αν$|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 135^o$

207. Αν$|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και$|\vec{\gamma}| = 6$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{2\pi}{3}, \left(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}\right) = \frac{5\pi}{6}, \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}}\right) = 6$ να υπολογίσετε το $|\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}|$.

208. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1,2)$ και $\vec{\beta} = (0,1)$. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{2\alpha} - \vec{\beta}$, να υπολογίσετε το $|\overrightarrow{B\Gamma}|$.

209. Αν $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και $\vec{\beta} = \frac{1}{7}\vec{i} + \vec{j}$, να βρείτε τη γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

210. Αν Α (4,1), Β (8,2) και Γ (1,3), να αποδείξετε ότι η γωνία των $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ είναι αμβλεία.

211. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -7)$ και $\vec{\beta} = (-3, \lambda)$. Αν $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 135°$, να βρείτε το λ.

212. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α (1,-2), Β (2,3) και Γ (0,1). Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
   i) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$,
   ii) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$, όπου για το σημείο Δ ισχύει: $\overrightarrow{B\Delta} = 2\overrightarrow{\Delta\Gamma}$,
   iii) $(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma})\overrightarrow{A\Gamma}$, όπου Μ το μέσον του ΒΓ.

213. Αν $\vec{\alpha} = (1, -1), \vec{\beta} = (1,1), 2\vec{v} + \vec{\upsilon} = \vec{\beta}$ και $\vec{v} + 2\vec{\upsilon} = \vec{\alpha}$, να βρείτε:
   i) τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\upsilon}$, ii) το συν$\left(\widehat{\vec{v}, \vec{\upsilon}}\right)$.

214. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 60^o$ και για τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\upsilon}$ ισχύουν: $2\vec{v} - \vec{\upsilon} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $-\vec{v} + \vec{\upsilon} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, να βρείτε το συν$\left(\widehat{\vec{v}, \vec{\upsilon}}\right)$.

215. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και$|\vec{\gamma}| = 3|\vec{\beta}|$, να δείξετε ότι: $\vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} + 6\vec{\beta})$.

216. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2x, 1)$, $\vec{\beta} = (4x^2, -1)$, να είναι κάθετα.

217. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, \lambda - 1)$, $\vec{\beta} = (\lambda + 2, -1)$ δεν είναι ορθογώνια.

218. Αν $|\vec{\alpha}| = 3$ και $|\vec{\beta}| = 6$, να βρείτε το λ ώστε τα διανύσματα $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ και $\vec{\upsilon} = 3\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$, να είναι κάθετα.

219. Να βρείτε το διάνυσμα που είναι κάθετο στο $\vec{v} = (1,2)$ και έχει μέτρο $\sqrt{5}$.

220. Έστω το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-1,2)$.
   i) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v}$ ώστε: $\vec{v} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{v}| = 5$.
   ii) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\upsilon}$ ώστε: $\vec{\upsilon} \parallel \vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\upsilon} = \sqrt{45}$.

221. Δίνονται τα σημεία Α (3,2), Β (7,-4). Να βρείτε σημείο Μ στον άξονα $x'x$ ώστε $A\widehat{M}B = 90°$.

222. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,3)$, $\vec{\beta} = (1, -2)$ και $\vec{\gamma} = (4, -3)$. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ που είναι κάθετα στο $\vec{\gamma}$ και έχουν μέτρο 5.

223. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,3)$, $\vec{\beta}=(1,-2)$ και $\vec{\gamma}=(4,-3)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$ ώστε να είναι $|\vec{v}|=10$ και $\vec{v}\perp\vec{\gamma}$.

224. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(4,-3)$ και $\vec{\beta}=(-2,7)$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ώστε να είναι $\vec{\gamma}\perp(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$ και $\vec{\gamma}^2=\vec{\alpha}^2$.

225. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$ και $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1\right)\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι ίσα ή αντίθετα.

226. Αν $\vec{\alpha}=(5,2)$ και $\vec{\beta}=(7,-3)$, να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ ώστε: $\vec{\alpha}\vec{x}=38$ και $\vec{\beta}\vec{x}=30$.

227. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύουν: $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\perp(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$ και $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=2$, να βρείτε τα $|\vec{\alpha}|$, $|\vec{\beta}|$.

228. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύουν: $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{2\pi}{3}$, $\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)\perp(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})$ και $\left|\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|=19\sqrt{19}$, να υπολογίσετε τα μέτρα των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

229. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύουν$\frac{\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|}{|\vec{\alpha}|}=\sqrt{2}$ και η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}$ είναι $45°$, να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, ii) $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$.

230. i) Να αποδείξετε ότι: $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=\frac{\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\beta}}{\left|\vec{\beta}\right|^2}$.

ii) Αν $\vec{\alpha}=(2,3)$ και $\vec{\beta}=(-1,4)$, να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

231. Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=60°$, να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{v}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

232. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και κάθετα, να βρείτε την προβολή του $\vec{v}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{u}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

233. Αν $\vec{\alpha}=(-1,2)$, $\vec{\beta}=(4,3)$ και $\vec{v}=\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$ να βρείτε την $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$.

234. Έστω $\vec{\alpha}=(4,-3)$ και $\vec{\beta}=(1,-3)$. Να υπολογίσετε το $\left|\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)\right|$.

235. Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{2\pi}{3}$, να βρείτε το λ ώστε $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\left(\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=-2\vec{\alpha}$.

236. Αν Αν $\vec{\alpha}=(1,3)$, $\vec{\beta}=(4,-3)$ και ισχύει: $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\left(\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=\frac{4}{5}\vec{\beta}$, να βρείτε το λ.

237. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$ και ισχύουν: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}^2$ και $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\left(\vec{\alpha}+x\vec{\beta}\right)=(3-x)\vec{\alpha}$, να βρείτε το x.

238. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(2,-1),Β(-1,4),Γ(3,-2) και ΑΜ διάμεσος. Να βρείτε την προβολή του $\overrightarrow{AM}$ πάνω στο $\overrightarrow{B\Gamma}$.

239. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με (ΑΒ)=3, ΑΓ=4, $B\hat{A}\Gamma$=120^o και ΑΜ διάμεσος. Να υπολογίσετε την $\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{A\Gamma}}\overrightarrow{AM}$.

240. Δίνεται ΑΒΓ με $\overrightarrow{AB} = (-1,0), \overrightarrow{A\Gamma} = (2,1)$ και ΑΔ το ύψος του. Να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta}$.

241. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (3,4)$. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ώστε να είναι $\vec{\alpha} = \vec{p} + \vec{q}, \vec{p} \parallel \vec{\alpha}$ και $\vec{q} \perp \vec{\beta}$

242. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3,-4)$ και $\vec{\beta} = (5,10)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δύο συνιστώσες $\vec{\gamma}$ και$\vec{\delta}$ ώστε$\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ και$\vec{\delta} \parallel \vec{\beta}$.

243. Δίνονται τα κάθετα και μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ ώστε $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}), \vec{y} \perp (\vec{\alpha} - \beta)$ και $\vec{x} - \vec{y} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

244. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει: $|\vec{\beta}| = 2, |\vec{\alpha}| = 2$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^o$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ για το οποίο είναι: $|\vec{\chi}| = 9$ και$\vec{\chi} \perp \vec{\alpha}$.

245. Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} = \vec{v} + \vec{u}$ με $\vec{v} \parallel \vec{\beta} \kappa\alpha\iota\, \vec{u} \perp \vec{\beta}$ να αποδείξετε ότι :$\vec{v} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta}$.

246. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{v} = \vec{\beta} - \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})}{\vec{\alpha}^2} \cdot \vec{\alpha}$ είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

247. Αν $\vec{v} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{v} - \vec{\alpha}$ να αποδείξετε ότι:

248. i) $\vec{v} \perp \vec{u}$ii) αν$\vec{\alpha} \parallel \overrightarrow{\beta}\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \vec{v} = \vec{\alpha}$.

249. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν:$\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{1}{4}\vec{\alpha}$ και $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = 2\vec{\beta}$, να βρείτε την γωνία και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$.

250. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = \frac{|\vec{\gamma}|}{3}$ να αποδείξετε ότι: i)$\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}$ii) $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$.

251. Αν $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma} = (3,2)$ και $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\gamma} = (2,-3)$

i) να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

ii) να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$.

252. Αν για κάθε x∈R ,τα διανύσματα $\vec{\alpha} + x\vec{\beta}$ και $x\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους και $|\vec{\alpha}|$=1 να δείξετε ότι :

i)$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ii)$|\vec{\beta}| = 1$ iii)$|3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}| = 5$

253. Έστω τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και το διάνυσμα $\vec{v} = \vec{\alpha} + \chi\vec{\beta}$. Να βρείτε το x ώστε το $|\vec{v}|$ να είναι ελάχιστο. Για την τιμή αυτή του x να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{v}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$.

254. Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει:

$(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}$

i) Να αποδείξετε ότι τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά

ii) Αν τα διανύσματα $\vec{v}, \vec{u}$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης τις ρίζες της εξίσωσης: $\vec{\alpha}^2 \cdot x^2 - 2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})x + |\vec{\beta}|^2 = 0$ να αποδειχθεί ότι $\vec{v} \parallel \vec{u}$

255. Αν $\vec{\alpha}=(2,1), \vec{\beta}=(-1,1), \vec{\gamma}=(3,5)$ να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ ώστε να είναι $(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}+2\vec{x}=\vec{\gamma}$.

256. Αν $\vec{x}+(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+1\neq 0$, να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{x}\cdot\vec{\alpha}=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{1+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}$, ii) $\vec{x}=\vec{\gamma}-\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{1+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}\cdot\vec{\beta}$

257. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|$=2 και ότι για κάθε κ,λ $\in R$ ισχύει:

$$(3\kappa\vec{\alpha}+4\lambda\vec{\beta})\perp(\lambda\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta})$$

i) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

ii) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

258. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν για το σημείο Μ ισχύει: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}$, να δείξετε ότι το Μ κινείται σε μια ευθεία.

259. Δίνονται τα σταθερά σημεία Α,Β με $|\overrightarrow{AB}|=4$.

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ ώστε $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=5$.

260. Έστω τα σημεία Α,Β με (ΑΒ)=2. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:$\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AB})$=5

261. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ διάμεσός του. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$\overrightarrow{AM}^2=2\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$$