



**Θετικής - Τεχνολογικής  
Κατεύθυνσης  
Μαθηματικά Β' Λυκείου  
Κωνικές Τομές**

**Επιμέλεια: ΜΑΧΗ ΣΚΟΥΦΑ  
ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΗΛΙΑΣΚΟΣ**

e-mail: [info@iliaskos.gr](mailto:info@iliaskos.gr)

[www.iliaskos.gr](http://www.iliaskos.gr)

## ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

### ΚΥΚΛΟΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος:
  - α) έχει κέντρο  $O(0,0)$  και διέρχεται από το σημείο  $A(3,4)$
  - β) έχει κέντρο το  $K(-1,3)$  και διέρχεται από το σημείο  $B(2,7)$ .
2. Να βρείτε την εξίσωση κύκλου ο οποίος:
  - α) έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα  $A(-2,-4)$  και  $B(2,3)$
  - β) έχει το κέντρο του στον άξονα  $x$  και διέρχεται από τα σημεία  $O(0,0)$  και  $\Gamma(2,2)$
3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία  $A(4,1)$ ,  $B(2,-3)$  και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon: x+y+1=0$ .
4. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση:
  - α)  $x^2+y^2-2x-4y+1=0$
  - β)  $2x^2+2y^2-6x+10y-1=0$
5. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το  $K(2,3)$  και εφάπτεται στην ευθεία  $\varepsilon: 4x-3y+11=0$ .
6. Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που διέρχεται από τα σημεία  $A(4,1)$ ,  $B(2,-3)$  και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon: x+y+1=0$ .
7. Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που διέρχεται από τα σημεία  $A(1,2)$ ,  $B(-1,-2)$ ,  $\Gamma(2,3)$ .
8. Δίνεται η ευθεία  $y=\lambda x$  και ο κύκλος  $x^2+y^2-4x+1=0$ . Να βρεθεί η τιμή του  $\lambda$  ώστε:
  - α) Να τέμνει τον κύκλο.
  - β) Να εφάπτεται του κύκλου.
  - γ) Να μην έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.
9. Δίνεται ο κύκλος  $C: x^2+y^2=4$ . Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων που είναι παράλληλες στην ευθεία  $\varepsilon: 3x+y-2=0$ .
10. Δίνεται η εξίσωση  $x^2+y^2-2x=0$ 
  - α) Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
  - β) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε η ευθεία  $\varepsilon: y=\lambda x+2$  να εφάπτεται στον παραπάνω κύκλο.
11. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου
  - α)  $C_1: x^2+y^2=25$  στο σημείο  $A(4,3)$
  - β)  $C_2: (x+2)^2+(y-1)^2=13$  στο σημείο του  $B(1,3)$
  - γ)  $C_3: x^2+y^2+2x+4y=0$  στο σημείο του  $\Gamma(1,1)$ .

12. Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου  $c: x^2+(y-1)^2=25$  στο σημείο του  $A(-3,5)$
13. Δίνεται ο κύκλος:  $(x-3)^2+(y-2)^2=25$ .
- Να βρείτε την εφαπτομένη  $\epsilon$  του κύκλου στο σημείο  $A(-1,5)$
  - Να δείξετε ότι η ευθεία  $\epsilon$  εφάπτεται στον κύκλο  $x^2+y^2-2x+8=0$ .
14. Δίνεται ο κύκλος  $C: x^2+y^2-2x+4y=0$ .  
Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου  $C$
- που έχουν συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda=-2$ .
  - που διέρχονται από το σημείο  $M(1+\sqrt{5}, 3)$ .
15. Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου  $x^2+y^2-2x-6y+9=0$  που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
16. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου  $C: x^2+y^2=8$ , που σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσον με 8.
17. Δίνεται ο κύκλος  $C: x^2+y^2-2\lambda x+\lambda^2-5=0$
- Να βρείτε το  $\lambda$  ώστε ο κύκλος  $C$  να εφάπτεται στην ευθεία  $\epsilon: y=2x-7$ .
  - Για  $\lambda=1$  να βρείτε την άλλη εφαπτομένη του κύκλου  $C$  που διέρχεται από το σημείο τομής της  $\epsilon$  με τον  $x'$ .
18. Να βρείτε την εξίσωση της διαμέτρου του μοναδιαίου κύκλου που είναι κάθετη στην ευθεία  $\epsilon: 2x+3y-1=0$ .
19. Δίνεται ο κύκλος  $C: x^2+y^2=3$ . Από το σημείο  $M(1,-2)$  φέρνουμε τις εφαπτόμενες  $Ma$  και  $MB$  στον κύκλο. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του  $AB$ .
20. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου  $c: x^2+y^2=25$
- όταν το σημείο  $M(1,2)$  είναι το μέσον της
  - όταν διέρχεται από το σημείο  $(-1,3)$  και έχει μήκος ίσο με 8.
21. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- ότι έχει κέντρο  $K(1,-3)$  και εφάπτεται στον  $x'$
  - όταν εφάπτεται στον  $y'$  στο σημείο  $A(0,3)$  και το κέντρο του βρίσκεται στην ευθεία  $\epsilon: y=2x$ .
  - όταν διέρχεται από το σημείο  $A(1,-2)$  και εφάπτεται στους  $x'$  και  $y'$ .
22. Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που εφάπτεται των παράλληλων ευθειών  $\epsilon_1: -x+2y+1=0$ ,  $\epsilon_2: -x+2y+3=0$  και το κέντρο του είναι σημείο της ευθείας  $\epsilon: 3x-2y-6=0$

23. Θεωρούμε τον κύκλο με εξίσωση  $(x-2)^2+(y-4)^2=10$  και το σημείο  $A(1,2)$
- να αποδείξετε ότι το  $A$  είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου
  - Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  που περνάει από το σημείο  $A$  και ορίζει με τον κύκλο χορδή με μέσο το  $A$ .
24. Αν η ευθεία  $y=2x$  τέμνει τον κύκλο  $C$  στα σημεία  $A(1,2)$ ,  $B(3,2)$  και ο κύκλος  $C$  διέρχεται από το σημείο  $\Gamma(3,0)$  και ισχύει  $\vec{GA} \cdot \vec{GB}=0$ , να βρείτε την εξίσωση του  $C$ .
25. Έστω τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $A(1,2)$ ,  $B(3,2)$ ,  $\Gamma(3,4)$  και  $\Delta(1,4)$
- να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $(x-1)(x-3)+(y-2)(y-4)=0$  παριστάνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του  $AB\Gamma\Delta$ .
  - Να αποδείξετε ότι οι  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  είναι διάμετροι του κύκλου αυτού.
26. Δίνεται ο κύκλος  $C: x^2+y^2-2x=0$ . να βρείτε την σχετική θέση των παρακάτω σημείων ως προς τον κύκλο  $C$ .
- $A(\sqrt{3},3)$
  - $B(1,3)$
  - $\Gamma(2,1)$
27. Να βρείτε την σχετική θέση των κύκλων  $c_1: x^2+y^2=1$  και  $c_2: (x-2)^2+(y+1)^2=2$
28. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο  $K(1,-2)$  που εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου  $C: x^2+y^2-2x-15=0$ .
29. Δίνονται οι κύκλοι  $C_1: x^2+y^2=1$ ,  $C_2: x^2+y^2+3x+4y+\lambda=0$ ,  $C_3: x^2+y^2-x-y+\lambda=0$ . Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε:
- Οι κύκλοι  $c_1, c_2$  να εφάπτονται εξωτερικά.
  - Οι κύκλοι  $c_1, c_3$  να εφάπτονται εσωτερικά.
30. Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής των κύκλων  $c_1: (x-1)^2+y^2=4$  και  $c_2: x^2+(y+2)^2=1$ .
31. Έστω οι ευθείες  $\varepsilon: x\eta\mu\theta+y\sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu\theta$  και  $\eta: x\sigma\upsilon\nu\theta-y\eta\mu\theta=\eta\mu\theta$ . Να δείξετε ότι:
- οι ευθείες  $\varepsilon$  και  $\eta$  τέμνονται
  - το σημείο τομής τους  $M$  ανήκει στον κύκλο
  - αν μια ευθεία  $\zeta$  τέμνει τις  $\varepsilon$  και  $\eta$  στα σημεία  $A$  και  $B$  τότε  $\vec{MA} \cdot \vec{MB}=0$ .
32. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες που φέρνουμε στον κύκλο  $C: x^2+y^2=25$  από το σημείο  $A(-1,7)$  είναι κάθετες.
33. Δίνεται ο κύκλος  $C: x^2+y^2-2x=0$  και το σημείο  $A(3,0)$ . Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο  $A$  και την οξεία γωνία που σχηματίζουν αυτές.
34. Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των κύκλων  $c_1: x^2+y^2=4$  και  $c_2: (x-4)^2+y^2=4$ .

35. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση C:  $x^2+y^2-2\lambda x-4\lambda y+5\lambda^2=\lambda^4+1$  παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακέραια τιμή του  $\lambda$  για την οποία η ευθεία  $\varepsilon: x-y+1=0$  εφάπτεται του κύκλου c

36. Έστω ο κύκλος c:  $x^2+y^2=4$ , τα σημεία A(4,0), B(0,3) και τυχαίο σημείο Γ του c. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A,B,Γ είναι κορυφές τριγώνου και ότι το κέντρο βάρους του τριγώνου ABΓ κινείται σε κύκλο.

37. Δίνονται τα σημεία A(α,0) και B(0,β) όπου  $\alpha, \beta > 0$ . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M(x,y) για τα οποία ισχύει:

$$|\overline{MA}|^2 - 2|\overline{MB}|^2 = 2$$

38. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με A ορθή και σημείο M του επιπέδου του τριγώνου τέτοιο ώστε :

$$(\overline{MB} + \overline{MG}) \cdot (\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MG}) = \alpha^2 \text{ όπου } \alpha = \text{BG}.$$

Να αποδείξετε ότι το σημείο M κινείται σε κύκλο του οποίου να υπολογίσετε την ακτίνα.

39. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με A(1,3), B(0,4) και Γ(-2,1). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου του τριγώνου για τα οποία ισχύει:

$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 + \overline{MG}^2 = 7 \text{ είναι κύκλος.}$$

40. Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε η ευθεία  $\varepsilon: (2+3\lambda)x + (2\lambda-1)y + 3-6\lambda=0$  να εφάπτεται στον παραπάνω κύκλο.

41. Δίνεται η εξίσωση  $x^2+y^2+4\lambda x-2(\lambda-2)y+4\lambda^2-4\lambda+4=0$ ,  $\lambda \neq 0$

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda$  του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του

β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων κινούνται σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωσή της

γ) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται στις ευθείες  $\varepsilon_1: 4x+3y+6=0$  και  $\varepsilon_2: y+2=0$

42. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο M(1,-2), έχει το κέντρο του στην ευθεία  $\varepsilon: 2x+3y=0$  και εφάπτεται στην ευθεία  $\eta: 12x+5y=0$ .

43. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται εξωτερικά του κύκλου  $x^2+y^2=1$ , έχει το κέντρο του στην ευθεία  $y=-3x+5$  και διέρχεται από το σημείο M(3,0).

44. Δίνεται η εξίσωση  $(x-\kappa)^2+(y-\kappa-1)^2=-\kappa^2+3\kappa-2$

α) για ποιές τιμές του  $\kappa$  η εξίσωση παριστάνει κύκλο.

- β) για τις τιμές του  $\kappa$  του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων βρίσκονται σε σταθερή ευθεία.
45. Δίνεται ο κύκλος  $C: x^2 + y^2 = 25$
- α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των χορδών του  $C$  που διέρχονται από το σημείο  $A(-3,4)$  είναι κύκλος του οποίου να βρείτε την εξίσωση.
- β) Αν η εφαπτομένη του  $c$  στο σημείο  $A(-3,4)$  τέμνει τις εφαπτόμενες που είναι παράλληλες στον  $\gamma$  γύστα σημεία  $B$  και  $\Gamma$ , να αποδείξετε ότι η γωνία  $BO\Gamma$  είναι ορθή.
46. Δίνεται ο κύκλος  $c: (x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$  και η ευθεία  $\epsilon: 2x - y + 4 = 0$
- α) να βρείτε το μήκος της χορδής που αποκόπτεται από τον κύκλο  $c$  και την ευθεία  $\epsilon$
- β) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος  $c$  ο οποίος είναι ομόκεντρος του κύκλου  $c$  και εφάπτεται στην ευθεία  $\epsilon$  διέρχεται από το σημείο  $M(1,4)$ .
47. Δίνεται η εξίσωση  $C: x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 + \lambda(2x + y - 4) = 0$ . Να αποδείξετε ότι:
- α) Η εξίσωση  $c$  για κάθε  $\lambda$  παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
- β) Για τις διάφορες τιμές του  $\lambda$  το κέντρο του κύκλου ανήκει σε σταθερή ευθεία  $\epsilon$  της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
- γ) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε ο κύκλος  $c$  να εφάπτεται στον άξονα  $\gamma\gamma$ .
- δ) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος  $c$  διέρχεται από δύο σταθερά σημεία των οποίων να βρείτε τις συντεταγμένες.
48. Δίνεται ο κύκλος  $c: x^2 + y^2 = 5$  και το σημείο  $M(\sin\theta, 5-\eta\mu\theta)$
- α) να αποδείξετε ότι το σημείο  $M$  είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου για κάθε  $\theta$
- β) Αν  $MA$  και  $MB$  οι εφαπτόμενες από το σημείο  $M$  στον κύκλο  $c$  να βρείτε την εξίσωση της χορδής  $AB$ .
- γ) Για τις διάφορες τιμές του  $\theta$  να αποδείξετε ότι το σημείο  $M$  ανήκει σε κύκλο.
49. Ένα αυτοκίνητο κινείται σε τροχιά πάνω σε πίστα της οποίας η εξίσωση σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς είναι με φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Σε δεδομένη χρονική στιγμή ξεφεύγει από την κυκλική τροχιά και κινείται κατά μήκος ευθείας η οποία εφάπτεται του κύκλου  $c$  και σταματάει στο σημείο  $A(3,6)$ . Να βρείτε :
- α) Το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου  $c$ .

β) Την εξίσωση της ευθείας που κινήθηκε το αυτοκίνητο τη στιγμή που ξέφυγε από την πίστα.

γ) Ποιο σημείο της προηγούμενης ευθείας απέχει λιγότερο από την αρχή των συντεταγμένων.

50. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  τρία φυλάκια ενός στρατοπέδου βρίσκονται στα σημεία  $A(1,-1)$   $B(-1,2)$  και  $\Gamma(0,2)$ . Ο αξιωματικός υπηρεσίας του στρατοπέδου του οποίου η εικόνα στο επίπεδο είναι το σημείο  $M$  εκτελεί βραδινή περίπολο γύρω από το στρατόπεδο.

α) Να αποδείξετε ότι τα φυλάκια δεν βρίσκονται σε ευθεία γραμμή.

β) Αν για το σημείο  $M$  ισχύει η ισότητα  $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{M\Gamma}^2 = 11$  να αποδείξετε ότι ο αξιωματικός κινείται σε κύκλο ο οποίος διέρχεται από το σημείο  $\Gamma$

γ) Αν ο αξιωματικός κινείται σε δρόμο (θεωρούμενο σαν ευθεία) ο οποίος διέρχεται από το φυλάκιο  $A$  και από τον οποίο δρόμο το φυλάκιο  $B$  απέχει τη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, που παριστάνει στο καρτεσιανό επίπεδο το δρόμο αυτό.

51. Δίνεται η εξίσωση :  $x^2 + y^2 - 2(x + y) + 1 = 0$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του .

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του παραπάνω κύκλου που άγονται από το σημείο  $M(1, 3)$  .

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία των εφαπτομένων αυτών .

52. Δίνεται η εξίσωση  $(x^2 + y^2 - 2)\lambda^2 + 2x - y + 1 = 0$  (1)

α) να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο

β) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που ορίζονται από την (1)

γ) να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από δυο σταθερά σημεία

53. Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 + y^2 + 3\lambda x + 2\lambda y + 13 = 0$  (1)

α) Να βρεθεί η τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , αν είναι γνωστό ότι η ακτίνα του παραπάνω κύκλου είναι ίση με 13.

β) Να βρεθεί και να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων.

54. Δίνεται η εξίσωση:  $x^2+y^2-2\lambda x-2(\lambda-1)y+(\lambda-1)^2=0$  (1)
- α) Δείξτε ότι αν  $\lambda \neq 0$ , η (1) παριστάνει έναν κύκλο  $C_\lambda$  του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
- β) Να βρείτε τους κύκλους  $C_\lambda$  οι οποίοι εφάπτονται στην ευθεία  $\varepsilon: 3x+4y-8=0$
55. Θεωρούμε τους κύκλους  $C: x^2+y^2=1$  και  $C': (x-3)^2+(y+4)^2=36$ .
- α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι  $C$  και  $C'$  εφάπτονται εσωτερικά .
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής .
56. Δίνεται η εξίσωση  $x^2+y^2-4\eta\mu\theta-6\gamma\sigma\nu\theta+4\eta\mu 2\theta=0$  με  $\theta \in \mathbb{R}$  . Να αποδειχθεί ότι :
- α) Η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο (C) του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.
- β) Ότι ο κύκλος (C) εφάπτεται στην ευθεία  $y=0$
- γ) Τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε μία έλλειψη, της οποίας να βρεθούν τα μήκη των αξόνων, οι εστίες και η εκκεντρότητα.
57. Δίνεται η εξίσωση  $c: x^2 + y^2 + (\eta\mu\theta)x - (\sigma\nu\theta)y = 2$
- α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο.
- β) Για τις διάφορες τιμές του  $\theta \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι το κέντρο του  $c$  κινείται σε κύκλο.
- γ) Αν  $\theta \in [0, 2\pi)$  να βρείτε ποιοι από τους παραπάνω κύκλους διέρχονται από το σημείο  $M(1, -1)$ .
- δ) Να βρείτε τις τιμές του  $\theta$  για τις οποίες η ευθεία  $x+y=0$  εφάπτεται των κύκλων  $c$ .
58. Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 2010 μυρμηγκία. Κάθε μυρμηγκί χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό  $n=1,2,3,\dots,2010$  και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση. Να δείξετε ότι :
- α) Η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του.
- β) Κατά την κίνηση τους όλα τα μυρμηγκία διέρχονται από ένα σταθερό σημείο  $A$  (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου  $A$
- γ) Οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας στο σημείο  $A$
59. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$  , όπου  $\mu, \lambda$  πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός . Να δείξετε ότι :



α) Για κάθε τιμή των  $\lambda, \mu$  η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

β) Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς  $\lambda, \mu$  ισχύει η σχέση  $3\mu + 2\lambda = 0$  .

- i) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την σχέση  $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$  για τις διάφορες τιμές των  $\mu$  και  $\lambda$  έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων ,
- ii) Να βρείτε τα  $\lambda$  και  $\mu$  έτσι ώστε, αν  $A, B$  είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία  $x + y + 2 = 0$  να ισχύει  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$
- iii) Για τις τιμές των  $\mu$  και  $\lambda$  που βρήκατε στο ερώτημα ii) να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου  $AOB$

60. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2x \cos \theta - 2y \sin \theta - 1 = 0$  ,

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\theta$  η εξίσωση παριστάνει κύκλο , του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Αν  $\theta = \frac{\pi}{2}$  να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο  $M(1,2)$ .

γ) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του  $\theta$  τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho=1$ .

61. Δίνονται η ευθεία  $\varepsilon : 5x + 3y + 2 = 0$  και ο κύκλος

$c : x^2 + y^2 - x - 2 = 0$  που τέμνονται στα σημεία  $M$  και  $N$ .

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό  $\lambda$  η εξίσωση παριστάνει κύκλο ο οποίος περνάει από τα σημεία  $M, N$ . Για ποια τιμή του  $\lambda$  ο κύκλος αυτός περνάει από την αρχή των αξόνων.

β) Να δείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

62. Δίνεται η εξίσωση  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2\lambda(x+2y-5)$  ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων.

γ) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι διέρχονται από σταθερό σημείο.

63. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 5 + \lambda(2x - y - 5) = 0$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων βρίσκονται πάνω σε μια σταθερή ευθεία

γ) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι διέρχονται από σταθερό σημείο

δ) Να δείξετε ότι οι κύκλοι έχουν κοινή εφαπτομένη την ευθεία

$$\varepsilon : 2x - y - 5 = 0$$

64. Δίνεται η εξίσωση  $c : x^2 + y^2 + \lambda^2 = 1 + \lambda(2y - 2x - 1) = 0$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματικό  $\lambda$ .

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda$  οι κύκλοι εφάπτονται του άξονα  $x'x$ .

65. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 + 2\lambda x - (\lambda + 1)y - (\lambda + 1) = 0$

α) Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό  $\lambda$  η εξίσωση παριστάνει κύκλο.

β) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων.

66. Δίνονται οι κύκλοι  $c_1 : x^2 + y^2 + x - y - 2 = 0$  και

$$c_2 : x^2 + y^2 - 3x + 1 = 0 \text{ οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και B.}$$

α) Να δείξετε ότι για κάθε  $\lambda \neq -1$  η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + x - y - 2 + \lambda(x^2 + y^2 - 3x + 1) = 0 \text{ παριστάνει κύκλο ο}$$

οποίος διέρχεται από τα σημεία A και B.

β) Να βρείτε για ποια τιμή του  $\lambda$  ο κύκλος αυτός διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων ανήκουν σε μια ευθεία.

67. Να δείξετε ότι καθώς το  $\theta$  μεταβάλλεται στο  $\mathbb{R}$  το σημείο

$M(3 + 2\sigma\eta\nu\theta, -1 + 2\eta\mu\theta)$  κινείται πάνω σε κύκλο και να βρείτε για

ποιες τιμές του  $\lambda$  η ευθεία  $\varepsilon : 5x + 12y + \lambda = 0$  είναι εφαπτόμενη αυτού του κύκλου.

## ΠΑΡΑΒΟΛΗ-ΕΛΛΕΙΨΗ-ΥΠΕΡΒΟΛΗ

1. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το  $(0,0)$ , στις παρακάτω περιπτώσεις:
  - α. Έχει άξονα συμμετρίας τον  $y'$  και διέρχεται από το σημείο  $(2,2)$
  - β. Έχει εστία  $E(-2,0)$  και διευθετούσα  $\delta: x-2=0$ .
  - γ. Έχει άξονα συμμετρίας τον  $x'$  και εφάπτεται της ευθείας  $y = 4x + 1$ .
2. α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $x+y+1=0$  και η παραβολή  $y^2=2x$  δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.  
β) Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το  $(0,0)$ , που έχει άξονα συμμετρίας τον  $Ox$  και εφάπτεται στην ευθεία  $y = 4x + 1$ .
3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής  $C: y^2=3x$  που είναι παράλληλη στην ευθεία  $\delta: 2x-y+2003=0$ .
4. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της παραβολής  $C: y^2=8x$  οι οποίες διέρχονται από το σημείο  $A(-2,3)$  και να αποδείξετε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους.
5. Για την παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 4x$  να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων που διέρχονται από το σημείο  $(-1,0)$ .
6. Δίνεται η παραβολή  $y^2=2px$ . Έστω  $AB$  χορδή της παραβολής, η οποία διέρχεται από την εστία  $E$ . Να δείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων των  $A, B$  από τον άξονα  $x'$  παραμένει σταθερό καθώς η  $AB$  στρέφεται γύρω από την εστία.
7. Δίνεται η παραβολή  $y^2=2px$  και χορδή  $AB$  η οποία διέρχεται από την εστία της  $E$ . Φέρνουμε τις εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία  $A, B$ . Να δείξετε ότι τέμνονται κάθετα.
8. Να δείξετε ότι η προβολή της εστίας  $E$ , παραβολής με εξίσωση  $y^2=2px$ , επάνω σε τυχαία εφαπτομένη, είναι σημείο του άξονα  $y'$ .
9. Δείξτε ότι το συμμετρικό της εστίας  $E$ , παραβολής με εξίσωση  $y^2=2px$ , ως προς τυχαία εφαπτομένη, είναι σημείο της διευθετούσας.
10. Δίνεται η παραβολή  $y^2=2px$  και μεταβλητό σημείο  $A$  αυτής. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου  $M$  της χορδής του ευθ. τμήματος  $OA$ .
11. Δίνονται τα σημεία  $A(\eta\mu t, -1+\sigma\upsilon\nu 2t)$   $t \in \mathbb{R}$ . Να βρεθεί η γραμμή επάνω στην οποία κινούνται.
12. Δίνεται η παραβολή  $2y^2 = x$ .
  - α. Να βρεθούν η εστία και η διευθετούσα της.
  - β. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου της  $A(2,1)$  από την εστία  $E$  και να συγκριθεί με την απόσταση  $OE$ .

- γ. Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραβολή το σημείο της με τη μικρότερη απόσταση από την εστία είναι η κορυφή της Ο.
- δ. Να βρεθεί σημείο στην παραβολή  $y^2 = 2px$ , που να απέχει από την εστία Ε απόσταση διπλάσια της ΟΕ.
13. Μια μεταβλητή ευθεία  $y = \lambda x + \beta$ , τέμνει την παραβολή  $y^2 = 6x$  στα σημεία Α και Β. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ είναι  $M\left(\frac{3-\lambda\beta}{\lambda^2}, \frac{3}{\lambda}\right)$
14. Να βρεθεί ο γ. τ. των μέσων των παραλλήλων χορδών της παραβολής  $y^2 = 2px$ , με συντελεστή διεύθυνσης λ.
15. Δίνεται η παραβολή C:  $y^2 = 2px$ . Θέτουμε  $x_1 = kx$  και  $y_1 = ky$ , όπου  $k \neq 0$ . Να αποδειχθεί ότι το σημείο  $(x_1, y_1)$  κινείται πάλι σε παραβολή.
16. Δίνεται σταθερό σημείο Α και μία ευθεία (ε), που δεν διέρχεται από το Α. Να αποδείξετε ότι, ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το Α και εφάπτονται στην (ε), είναι παραβολή.
17. Δίνεται ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 2$  και η παραβολή  $y^2 = 8x$ .
- α. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες του κύκλου και της παραβολής  
β. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.
18. Ισόπλευρο τρίγωνο ΟΑΒ είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή  $y^2 = 4px$ , με κορυφή το Ο. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.
19. Να βρεθεί η εφαπτομένη της παραβολής C:  $y^2 = 6x$ , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon: x - 2y + 2002 = 0$ .
20. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που διέρχεται από το σημείο  $M(2, 1)$ .
21. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της παραβολής με εξίσωση  $x = \frac{1}{6}y^2$  οι οποίες άγονται από το σημείο  $A(0, 1)$
22. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση  $x^2 + (y-2)^2 = 3$  και η παραβολή με εξίσωση  $y = \frac{1}{2}x^2$  Να βρείτε τα κοινά τους σημεία.
23. Να βρείτε την εστία Ε και τη διευθετούσα δ των παρακάτω παραβολών
- α.  $y = x^2$   
β.  $y = -2x^2$
24. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής C:  $y^2 = 4x$  η οποία είναι κάθετη στην ευθεία  $\varepsilon: y = -2x + 1$ .
25. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το  $(0, 0)$  στις παρακάτω περιπτώσεις:
- α) Είναι συμμετρική ως προς το θετικό ημίαξονα Οx και έχει παράμετρο  $p = 5$ .

- β) Είναι συμμετρική ως προς τον άξονα  $Ox$  και διέρχεται από το σημείο  $(-1, 4)$ .
- γ) Είναι συμμετρική ως προς τον άξονα  $Oy$  και διέρχεται από το σημείο  $(2, 2)$ .
- δ) Έχει άξονα συμμετρίας τον  $Oy$  και εστία  $E(0, -4)$ .
- ε) Έχει εστία  $E(-2, 0)$  και διευθετούσα  $\delta: x - 2 = 0$ .
- στ) Έχει άξονα συμμετρίας τον  $Ox$  και εφάπτεται της ευθείας  $\gamma = 4x + 1$ .
26. Να βρεθεί η σχετική θέση της ευθείας  $x + y + 1 = 0$  ως προς την παραβολή  $\gamma^2 = 2x$ .
27. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής  $\gamma^2 = 3x$  στα σημεία  $(0, 0)$  και  $(12, 6)$ .
28. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής  $\gamma^2 = 3x$  που είναι παράλληλη στην ευθεία  $2x - \gamma + 2005 = 0$ .
29. Από το σημείο  $(-2, 3)$  προς την παραβολή  $\gamma^2 = 8x$  γράφονται δύο εφαπτόμενες ευθείες.
- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων αυτών ευθειών.
- β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.
30. Έστω η παραβολή  $\gamma^2 = 4px$ ,  $p > 0$ . Μια χορδή της  $AB$  είναι κάθετη στον άξονα και έχει μήκος  $8p$ . Να αποδειχθεί ότι  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ .
31. Ισόπλευρο τρίγωνο  $OAB$  είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή  $\gamma^2 = 4px$  με κορυφή το  $O$ . Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.
32. Έστω η παραβολή  $C: \gamma^2 = 2px$  και μια χορδή της  $AB$  παράλληλη με το άξονα  $\gamma'\gamma$ , η οποία περνάει από την εστία. Να αποδειχθεί ότι:
- α)  $(AB) = 2(EK)$  όπου  $K$  το σημείο που τέμνει ο άξονας  $x'x$  τη διευθετούσα.
- β) Οι εφαπτόμενες στα  $A$  και  $B$  διέρχονται από το  $K$ .
33. Δίνεται η παραβολή  $C: \gamma^2 = 2px$  και δύο χορδές  $OB, OG$  ώστε η γωνία  $\text{BOG} = 90^\circ$ . Να αποδειχθεί ότι η  $BG$  διέρχεται από σταθερό σημείο.
34. Δίνεται η παραβολή  $2\gamma^2 = x$ .
- α) Να βρεθούν η εστία και η διευθετούσα της.
- β) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου της  $A(2, 1)$  από την εστία  $E$  και να συγκριθεί με την απόσταση  $(OE)$ .
- γ) Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραβολή το σημείο της με τη μικρότερη απόσταση από την εστία είναι η κορυφή  $O$ .
- δ) Να βρεθεί σημείο στην παραβολή  $\gamma^2 = 2px$  που να απέχει από την εστία  $E$  διπλάσια της  $OE$ .

35. Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$  και η ευθεία ( $\epsilon$ ):  $y = x - 1$ .
- Να δείξετε ότι η ( $\epsilon$ ) περνά από την εστία της παραβολής.
  - Να βρείτε τα κοινά σημεία A, B της ( $\epsilon$ ) και της παραβολής.
  - Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία A, B είναι κάθετες.
  - Να δείξετε ότι κάθε ευθεία που περνά από την εστία και τέμνει της παραβολή σε δύο σημεία έχει την ιδιότητα ( $\gamma$ ).
36. Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 2px$ . Θέτουμε  $x' = ax$  και  $y' = ay$ ,  $a \neq 0$ . Να αποδειχθεί ότι το σημείο ( $x'$ ,  $y'$ ) κινείται πάλι σε παραβολή.
37. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου  $(x, y) = (2pk^2, 2pk)$  με  $k \in \mathbb{R}$ .
- Να αποδειχθεί ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε μία παραβολή.
  - Αν  $A(2pk_1^2, 2pk_1)$ ,  $B(2pk_2^2, 2pk_2)$  είναι δύο σημεία της παραβολής αυτής, να αποδειχθεί ότι αν η AB διέρχεται από την εστία είναι  $4k_1k_2 = -1$ .
38. Αν ( $\epsilon$ ) είναι η εφαπτομένη της έλλειψης  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  στο  $M_1(x_1, y_1)$ , να αποδείξετε ότι η κάθετη στην ( $\epsilon$ ) έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = \frac{\beta^2 x_1}{\alpha^2 y_1}$ .
39. Δίνεται ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 2$  και η παραβολή  $y^2 = 8x$ .
- Να βρεθούν οι κοινές εφαπτομένες του κύκλου και της παραβολής.
  - Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες
40. Δίνεται σταθερό σημείο A και ευθεία ( $\epsilon$ ) που δεν διέρχεται από το A. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το A και εφάπτονται στην ( $\epsilon$ ) είναι παραβολή.
41. Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει μεγάλο και μικρό άξονα με μήκος 6 και 4 μονάδες αντίστοιχα και έχει εστίες πάνω στον άξονα  $x'x$  συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων.
42. Να βρεθεί η εκκεντρότητα και οι εστίες καθεμιάς από τις παρακάτω ελλείψεις:
- $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$
  - $4x^2 + 9y^2 = 36$
  - $9x^2 + 25y^2 = 225$
43. Να εξετάσετε αν υπάρχει έλλειψη στην οποία ένα σημείο της M να σχηματίζει με τις εστίες  $E'$  και E ισόπλευρο τρίγωνο.
44. Ο κύκλος με κέντρο το  $O(0, 0)$  και ακτίνα  $\beta$  διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ,  $\alpha > \beta$ . Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.

45. Δίνεται η έλλειψη C:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Να αποδείξετε ότι και η έλλειψη με

εξίσωση  $\frac{\kappa^2 x^2}{a^2} + \frac{\kappa^2 y^2}{b^2} = 1$  έχει την ίδια εκκεντρότητα με την C.

46. Να συγκριθούν οι εκκεντρότητες των ελλείψεων C<sup>1</sup>:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  και

$$C^2: \frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{\beta^4} = 1, \alpha > \beta.$$

47. Να βρεθεί η μορφή της εξίσωσης της έλλειψης με εκκεντρότητα  $\epsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

48. Θεωρούμε την υπερβολή C:  $x^2 - y^2 = 1$  και την ευθεία (ε):  $x + 2y = \alpha$ . Να βρεθούν οι τιμές του α, για τις οποίες η (ε) εφάπτεται στη C.

49. Δίνεται ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 4$  και η έλλειψη  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$ .

α) Να δείξετε ότι το σημείο  $(1, -\sqrt{3})$  είναι κοινό τους σημείο και στην συνέχεια να βρείτε όλα τα κοινά τους σημεία.

β) Να δείξετε ότι όλα τα κοινά τους σημεία είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

γ) Να βρεθούν τα σημεία  $M(x_0, y_0)$  ώστε  $x_0^2 + y_0^2 = 4$  και  $(E'M) + (EM) = 2\sqrt{6}$  (E και E' οι εστίες της έλλειψης).

50. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης  $9x^2 + 16y^2 = 144$  που είναι:

α) Παράλληλες προς την ευθεία (ε):  $x + y = 0$ .

β) Κάθετες στην ευθεία (ε).

51. Δίνεται η έλλειψη  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο E'BEB' είναι ρόμβος (E', E οι εστίες της έλλειψης, B, B' τα άκρα του μικρού της άξονα).

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του ρόμβου.

52. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις εστίες της στον άξονα x'x συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων και ακόμα:

α) Έχει εστιακή απόσταση (E'E) = 6 και εκκεντρότητα  $\epsilon = \frac{3}{2}$ .

β) Έχει εστιακή απόσταση (E'E) = 20 και εξισώσεις ασύμπτωτων  $y = \frac{4}{3}x$  και  $y = -\frac{4}{3}x$ .

γ) Έχει εστιακή απόσταση (E'E) = 4 και ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.

53. Έστω η υπερβολή  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ . Να δειχθεί ότι κάθε παράλληλη προς μία ασύμπτωτη τέμνει την υπερβολή σ' ένα μόνο σημείο.
54. Έστω  $M$  τυχαίο σημείο της υπερβολής  $\gamma^2 - x^2 = a^2$ , ( $\epsilon$ ) η εφαπτόμενη στο  $M$  και  $A, B$  τα σημεία που η ( $\epsilon$ ) τέμνει τις ασύμπτωτες. Τότε το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$  είναι σταθερό.
55. Έστω κύκλος με εξίσωση  $x^2 + y^2 = a^2$ . Αν θέσουμε  $x=x'$  και  $y = cy'$ , να αποδείξετε ότι το σημείο  $(x', y')$  ανήκει σε έλλειψη.
56. Δίνεται η υπερβολή  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  και  $M(x_1, y_1)$  ένα σημείο της διαφορετικό από τις κορυφές της. Αν η κάθετη ( $\epsilon'$ ) της ( $\epsilon$ ) στο  $M$  τέμνει τους άξονες  $x', y'$  στα  $\Gamma$  και  $\Delta$  αντίστοιχα ( $\epsilon$  η εφαπτομένη στο  $M$ ):
- Να βρεθεί συναρτήσει των  $x_1, y_1$  η εξίσωση της ( $\epsilon'$ ).
  - Να βρεθούν οι συντεταγμένες των  $\Gamma$  και  $\Delta$ .
  - Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου  $N$  του  $\Gamma\Delta$ .
  - Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος του  $N$  είναι μια υπερβολή  $C^1$ .
  - Να αποδειχθεί ότι οι υπερβολές  $C$  και  $C^1$  έχουν τις ίδιες εκκεντρότητες αλλά τις εστίες σε διαφορετικούς άξονες.
57. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  και την ευθεία  $y = 2$ .
58. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της υπερβολής  $25x^2 - 4y^2 = 100$  που είναι παράλληλες προς την ευθεία  $3x - y = 0$ .
59. Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .
60. Θεωρούμε την  $y^2 = x$  και τον κύκλο  $x^2 + y^2 - x = 0$ . Φέρνουμε τη διχοτόμο της  $xOy$  που τέμνει τον κύκλο στο  $A$  και την παραβολή στο  $B$ . Φέρνουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου και της παραβολής στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα. Να δείξουμε ότι τέμνονται στον άξονα  $y'y$ .
61. Δίνεται κύκλος  $C_1$  με εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - p^2 = 0$  ( $a > 0$ ) και κέντρο το  $A$ . Έστω μεταβλητό σημείο  $B$  του ημιάξονα  $Oy$ . Αποδείξτε ότι οι κύκλοι που γράφουμε με κέντρο το  $B$  και ακτίνα  $B\Gamma$ , όπου  $\Gamma$  το σημείο τομής των κύκλων με τον  $C_1$ , τέτοιο ώστε η γωνία  $BA\Gamma$  να είναι ορθή, διέρχονται από σταθερά σημεία.
62. Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 2px, p > 0$  και δυο σημεία της  $A$  και  $B$  εκατέρωθεν του άξονα συμμετρίας της. Φέρνουμε τις προβολές  $A', B'$  των  $A$  και  $B$  στον άξονα  $y'y$ . Αν  $\Lambda$  είναι το συμμετρικό της κορυφής  $O$  της παραβολής ως προς την εστία  $E$  και  $M$  το μέσο του  $A'B'$ , να δείξετε ότι οι ευθείες  $AB$  και  $M\Lambda$  είναι κάθετες.



63. Δίνεται ο κύκλος  $C_1: \chi^2 + \psi^2 - 6\chi + 1 = 0$  και η παραβολή  $C_2: \psi^2 = 4\chi$ .
- να βρεθεί το κέντρο  $K$  και η ακτίνα  $\rho$  του κύκλου  $C_1$
  - να βρεθούν τα κοινά σημεία  $A, B$  του κύκλου και της παραβολής
  - να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων  $\epsilon_1, \epsilon_2$  της παραβολής στα σημεία της  $A, B$
  - να δείξετε ότι οι ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  εφάπτονται στον κύκλο.
64. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο  $A(1,3)$
65. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- όταν έχει εστίες τα σημεία  $E'(-4,0)$  και  $E(4,0)$  και μεγάλο άξονα 10
  - όταν έχει εστίες τα σημεία  $E'(0,-5)$  και  $E(0,5)$  και μεγάλο άξονα 26
66. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον  $\chi' \chi$  σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- όταν έχει εστία το σημείο  $E(-1,0)$
  - όταν διέρχεται από το σημείο  $A(1,2)$
67. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση  $C: 3\chi^2 + 4\psi^2 = 12$  και η εξίσωση  $C_1: \chi^2 + \psi^2 - 2\chi + 2\psi = \alpha - 2005$ .
- Για ποιες τιμές του  $\alpha$  η  $C_1$  παριστάνει κύκλο.
  - Για ποια τιμή του  $\alpha$  ο κύκλος  $C_1$  διέρχεται από την εστία της έλλειψης με αρνητική τετμημένη.
  - Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  ώστε η εφαπτομένη της έλλειψης με εξίσωση  $C$  στο σημείο  $(1,2)$  να εφάπτεται του κύκλου με εξίσωση  $C_1$ .
68. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής με κάθετες ασύμπτωτες, εστίες στον άξονα  $\gamma \gamma$  και της οποίας η εφαπτομένη σε ένα σημείο με τεταγμένη 3 είναι παράλληλη στην ευθεία  $6\gamma + 2\chi = 7$ .
69. Θεωρούμε τον κύκλο ( $C$ ) με κέντρο  $K(-1,0)$  που διέρχεται από το σημείο  $A(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
- Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου ( $C$ ).
  - Να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη ( $\epsilon$ ) του κύκλου στο σημείο  $A(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$  έχει εξίσωση  $\chi - \sqrt{3}\gamma - 1 = 0$
70. Αν η ευθεία ( $\epsilon$ ) διέρχεται από την εστία της παραβολής που έχει κορυφή  $O(0,0)$  και άξονα συμμετρίας τον ημιάξονα  $O\chi$ , τότε:
- Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής.
  - Αν η διευθετούσα της παραβολής τέμνει τον κύκλο

( C ) στα σημεία M και N να αποδείξετε ότι:  $(AMN) = 0,5$  τετραγωνικές μονάδες

71. Δίνεται η εξίσωση  $y^2 - 2xy + x^2 - 4 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες με εξισώσεις:  $\epsilon_1 : y = x + 2$  και  $\epsilon_2 : y = x - 2$ . Ποια είναι η γωνία που σχηματίζουν με τον  $x'x$ ;

β) Να αποδείξετε ότι η  $\epsilon_1$  εφάπτεται στην παραβολή  $y^2 = 2px$  στο σημείο  $A(2,4)$  αυτής.

γ) Αν A το κοινό σημείο της  $\epsilon_2$  με τον  $x'x$  να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στην ευθεία  $\epsilon_1$  και εφάπτεται στην ευθεία  $\epsilon_2$  στο σημείο A.

72. Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$

α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = x - 1$

73. Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης :  $25x^2 + 4y^2 = 100$ . Να βρεθούν

α) Ο μικρός και μεγάλος άξονας, οι εστίες E και E' και η εκκεντρότητα

β) Να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία την E' και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από την εστία E και είναι παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$ .

74. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης C :  $x^2 + 3y^2 = 3$  οι οποίες είναι :

α) παράλληλες στην ευθεία  $\epsilon_1 : x + 3y + 1 = 0$

β) κάθετες στην ευθεία  $\epsilon_2 : x + y + 2 = 0$

75. Δίνεται η παραβολή C :  $y^2 = 4x$  με εστία E και ευθεία ζ κάθετη στον άξονα  $x'x$  που διέρχεται από το E. Έστω B, Γ τα κοινά σημεία της παραβολής και της ευθείας και  $\epsilon_1, \epsilon_2$  οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία B και Γ αντίστοιχα.

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B και Γ

β) να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων  $\epsilon_1, \epsilon_2$

γ) να αποδείξετε ότι το κοινό σημείο των ευθειών  $\epsilon_1, \epsilon_2$  ανήκει στον άξονα  $x'x$  και στη διευθετούσα της παραβολής

δ) αν A το κοινό σημείο των  $\epsilon_1, \epsilon_2$  να δείξετε ότι ο άξονας  $x'x$  διχοτομεί την γωνία BΑΓ.

76. Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$ . Να βρείτε:

α) την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής

β) τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων.

77. Έστω τα σημεία  $M(x, \psi)$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει  $16x^2 + 25\psi^2 = 400$

α) να δείξετε ότι το  $M$  βρίσκεται στη έλλειψη  $\frac{x^2}{25} + \frac{\psi^2}{16} = 1$

β) να βρεθούν τα μήκη των αξόνων της έλλειψης

γ) να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης

δ) να δειχθεί ότι το σημείο  $N(3, \frac{16}{5})$  είναι σημείο της έλλειψης και να βρεθεί το αντιδιαμετρικό του.

78. Δίνονται παραβολή  $c_1: \psi^2 = 4x$  και κύκλος  $c_2: x^2 + \psi^2 = 5$

α) Να βρεθεί η εστία  $E$  της παραβολής

β) Να δειχθεί ότι τέμνονται στα  $A(1, 2)$  και  $B(1, -2)$

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων  $\epsilon_1, \epsilon_2$  των  $c_1, c_2$  στο σημείο  $A$

δ) Να εξετάσετε αν  $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$

79. Δίνεται ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 4$  και η έλλειψη  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$  Να δείξετε ότι το

σημείο  $(1, -\sqrt{3})$  είναι κοινό τους σημείο και στη συνέχεια να βρείτε όλα τα κοινά τους σημεία.

Να δείξετε ότι τα κοινά τους σημεία είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

80. Να βρεθεί η εστία και η διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση:

A)  $\psi^2 = 8x$     B)  $\psi^2 = -8x$     Γ)  $\psi = 14x^2$

81. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ευθειών  $ay = \lambda b(a+x)$  και  $\lambda y = b(a-x)$ ,

$0 < b < a$ , ανήκει στην έλλειψη  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  για όλες τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

82. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση  $4x^2 + 9y^2 = 36$

α) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα της έλλειψης

β) Στο σημείο  $A$  της έλλειψης με τετμημένη 1 να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας.

83. Δίνεται η παραβολή  $\psi^2 = 4x$  και η ευθεία  $\epsilon: \psi = x - 1$

α) να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας  $E$  της παραβολής και την εξίσωση της διευθετούσας  $\delta$  της παραβολής

β) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία  $\epsilon$

γ) να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που και έχει κέντρο την εστία  $E$  της παραβολής εφάπτεται στην διευθετούσα  $\delta$ .

84. Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$  και η ευθεία  $(\epsilon): y = x - 1$

α) Να δείξετε ότι η  $(\epsilon)$  περνά από την εστία της

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία  $A, B$  της  $(\epsilon)$  και της παραβολής.

γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία  $A, B$  είναι κάθετες

85. Δίνεται η παραβολή  $\psi^2 = 4\chi$  και η γραμμή  $\varepsilon: (\lambda+1)\chi - \lambda\psi - 4 = 0$ .

α) Να βρεθούν η εστία και η διευθετούσα της παραβολής.

β) Να δειχθεί ότι η γραμμή ( $\varepsilon$ ) είναι ευθεία για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$

γ) Αν  $\lambda=3$  ποιά σημεία της παραβολής έχουν τη μικρότερη απόσταση από την ευθεία και πόση είναι αυτή η απόσταση ;

86. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση  $9x^2 - 16y^2 = 144$

α) Να υπολογιστούν οι εξισώσεις των ασύμπτωτων και να βρεθούν οι εστίες  $E$  και  $E'$  της υπερβολής.

β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από την εστία  $E$  και είναι παράλληλη της ασύμπτωτης που έχει θετικό συντελεστή διεύθυνσης.

γ) Να βρεθεί το κοινό σημείο της ευθείας του ερωτήματος β με την υπερβολή.

87. Δίνεται η υπερβολή  $\frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

α) Να βρείτε την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της.

β) Αν η εφαπτομένη  $\varepsilon$  στην κορυφή  $A(\alpha, 0)$  τέμνει την ασύμπτωτη  $y = \alpha\beta$  στο σημείο  $\Gamma$  να αποδείξετε ότι  $(OE) = (O\Gamma)$  ( $E$  εστία).