Ύπαρξη Ρίζας Εξίσωσης

Όταν σε άσκηση μας δίνουν μια εξίσωση, της οποίας απαιτείται η ύπαρξη ρίζας, θα μεταφέρουμε τους όρους στο ένα μέλος, θα θέτουμε συνάρτηση $h(x)$, οπότε αν η άσκηση ζητά:

- Μία τουλάχιστον ρίζα.

  Θα εξασφαλίζουμε την ύπαρξη μιας ρίζας, εφαρμόζοντας Θεώρημα Bolzano αν δίνεται διάστημα, ή βρίσκοντας προφανή ρίζα. Η ύπαρξη μιας ρίζας εξασφαλίζεται και αν γνωρίζουμε ότι το Σύνολο Τιμών περιλαμβάνει το 0.

  Αν δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε κάτι από τα παραπάνω, μπορούμε να εφαρμόσουμε Θεώρημα Rolle στην παράγουσα H της $h(x)$. Δηλαδή θα βρίσκουμε συνάρτηση $H(x)$, για την οποία ισχύει $H'(x) = h(x)$.
- Μία το πολύ ρίζα.

  Θα δείχνουμε ότι η h είναι γνήσια μονότονη, ή 1 □ 1, ή αντιστρέψιμη, ή υποθέτοντας ότι η h έχει δύο ρίζες $\rho_1 < \rho_2$, θα καταλήγουμε σε άτοπο, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Rolle στο $[\rho_1, \rho_2]$.
- Μία ακριβώς ρίζα.

  Θα εξασφαλίζουμε πρώτα το τουλάχιστον μία και μετά αποδεικνύουμε το πολύ μία.
- κ τουλάχιστον ρίζες.

  Θα εξασφαλίζουμε την ύπαρξη κ ριζών, εφαρμόζοντας Θεώρημα Bolzano σε κ διαστήματα ή βρίσκοντας κ προφανείς ρίζες.
- κ το πολύ ρίζες.

  Υποθέτουμε ότι έχει κ + 1 ρίζες και με διαδοχικές εφαρμογές του Θεωρήματος Rolle στα διαστήματα που ορίζονται από τις ρίζες καταλήγουμε σε άτοπο.
- κ ακριβώς ρίζες.

  Θα εξασφαλίζουμε πρώτα το τουλάχιστον κ και μετά αποδεικνύουμε το πολύ κ.

Θεώρημα **Bolzano**

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Παρατηρήσεις

- Το θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον λύσης της εξίσωσης $f(x) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να υπάρχουν και περισσότερες.
- Το θεώρημα δεν βρίσκει τη ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, απλά εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας.
- Όταν δεν ικανοποιούνται και οι δύο προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Πρόταση

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο (α, β) ώστε $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x) < 0$. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Παρατήρηση

Η παραπάνω πρόταση μας δίνει τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bolzano όταν έχουμε συνέχεις σε ανοιχτό διάστημα ή σε ημίκλειστο διάστημα.

Πρόταση

Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

Θεώρημα Ενδιάμεσης τιμής

Αν μια συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- ισχύει $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό κ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \kappa$.

Παρατήρηση

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα. Στην περίπτωση που η f είναι σταθερή το $f(\Delta)$ είναι μονοσύνολο.

Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία x_ε και x_μ του $[\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε να ισχύει $f(x_\varepsilon) \leqslant f(x) \leqslant f(x_\mu)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Δηλαδή η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ ελάχιστη τιμή $f(x_\varepsilon)$ και μέγιστη τιμή $f(x_\mu)$.

Παρατηρήσεις

- Αν η f είναι συνεχής και αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ τότε το σύνολο τιμών $f([\alpha, \beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$.
- Αν η f είναι συνεχής και φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$ τότε το σύνολο τιμών $f([\alpha, \beta]) = [f(\beta), f(\alpha)]$.
- Όταν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ έχει μέγιστο και ελάχιστο.

  Έστω $f(x_\varepsilon)$ το ελάχιστο και $f(x_\mu)$ το μέγιστο όπου $x_\varepsilon, x_\mu \in [\alpha, \beta]$. Αν υποθέσουμε ότι είναι $x_\varepsilon < x_\mu$, τότε η f είναι συνεχής στο $[x_\varepsilon, x_\mu]$. Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για κάθε κ μεταξύ της $f(x_\varepsilon)$ και $f(x_\mu)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα θ τέτοιο ώστε $f(\theta) = \kappa$.

Επομένως όταν έχουμε συνάρτηση f συνεχή στο $[\alpha,\beta]$, για κάθε κ που βρίσκεται μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής της f και όχι μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα θ ώστε $f(\theta)=\kappa$.

Πρόταση

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ, τότε η αντίστροφη της f^{-1} είναι συνεχής στο $f(\Delta)$ και γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

Μεθοδολογίες

- Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα που ορίζεται από δύο διαδοχικές ρίζες της. Επομένως για να βρούμε το πρόσημο της συνάρτησης σ' ένα διάστημα θα βρίσκουμε την τιμή της συνάρτησης στο διάστημα αυτό.
- Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει τουλάχιστον μια ρίζα σ' ένα διάστημα (α,β), θα μεταφέρουμε όλους τους όρους στο ένα μέλος της εξίσωσης και θα θέτουμε καινούργια συνάρτηση $h(x)$. Για την εξίσωση $h(x)=0$ που δημιουργήσαμε θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Bolzano στην $h(x)$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Ασκήσεις

1. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(\alpha)=\beta^2$ και $f(\beta)=\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\theta)=\theta^2$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$.

2. Έστω συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,1]$ συνεχής. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta\in[1,e]$ ώστε $f(\ln\theta)=\ln\theta$.

3. Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν $f(\alpha)=\alpha$ και $g(\beta)=\beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta\in[\alpha,\beta]$ ώστε $\kappa\cdot f(\theta)+\lambda\cdot g(\theta)=(\kappa+\lambda)\cdot\theta$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ ομόσημοι και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$.

4. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$. Να αποδείξετε ότι:

   i. Αν $\alpha<\mu<\nu<\beta$ τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\dfrac{f(\mu)+f(\nu)}{2}=f(x_0)$.

   ii. Αν $\alpha<\mu<\nu<\beta$ και θ_1,θ_2 θετικοί αριθμοί ακέραιοι, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=\dfrac{\theta_1 f(\mu)+\theta_2 f(\nu)}{\theta_1+\theta_2}$.

5. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Δίνεται ότι $f(\alpha)=f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta\in[\alpha,\beta)$ ώστε $f(\theta)=f\left(\theta+\dfrac{\beta-\alpha}{3}\right)$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$.

6. Έστω συνάρτηση f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και συνάρτηση g γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f([\alpha,\beta])\cap g([\alpha,\beta])\neq\emptyset$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\theta\in[\alpha,\beta]$ ώστε $f(\theta)=g(\theta)$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - (\alpha + \beta)x^2 - \alpha\beta x + \alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in [0,1]$ ώστε $f(\theta) = \dfrac{(1-\alpha)(1-\beta)}{2}$.
8. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^6 - 16x = 11$ έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.
9. Αν $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha\sigma\upsilon\nu x + 2\beta = 2x$ έχει μια τουλάχιστον θετική πραγματική λύση που δεν είναι μεγαλύτερη του $\alpha + \beta$.
10. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta$, όπου $\beta > 0$ και $\alpha + \beta < -1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ρίζες πραγματικές.
11. Έστω $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις, ώστε $f(x) - g(x) = \kappa x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου κ σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα x'x σε δύο σημεία με ετερόσημες τετμημένες, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον στο $\mathbb{R}$.
12. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και διάστημα $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$. Αν η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[\alpha, \beta]$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\alpha)f^2(x) + \kappa f(x) + f(\beta) = 0$, όπου κ πραγματικός αριθμός, έχει δύο λύσεις στο $\mathbb{R}$.
13. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Έστω επίσης ότι $f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \alpha, g(\beta) = \beta$ και $g(\alpha) = \alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta \in (\alpha, \beta)$ ώστε $(f \circ g)(\theta) + (g \circ f)(\theta) = 2\theta$.
14. Έστω συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$, ώστε η f να είναι περιττή, η φθίνουσα και να ισχύει $g(\alpha) = -\alpha$ και $g(-\alpha) = \alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-\alpha, \alpha)$ ώστε να ισχύει $f(g(x_0)) + f(x_0) + g(x_0) = 0$.
15. Έστω συναρτήσεις $f, g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς ώστε $f([\alpha, \beta]) = g([\alpha, \beta]) = [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in [\alpha, \beta]$ ώστε να ισχύει $f(g(\theta)) + g(f(\theta)) = 2\theta$.
16. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g, h: [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα ενώ η g γνησίως φθίνουσα και $f([\alpha, \beta]) = g([\alpha, \beta]) = [\alpha, \beta]$. Έστω επίσης ότι $h(\alpha) = \beta$ και $h(\beta) = \alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει $f(g(h(\theta))) = g(f(\theta))$.
17. Έστω συνάρτηση f συνεχής, ώστε $\sqrt[3]{2x+8} - \sqrt{x^2+4} \leqslant xf(x) \leqslant \eta\mu\dfrac{x}{6} + x^6$ (1), για κάθε $x \in [-4, +\infty)$.
    i. Να αποδείξετε ότι $f(0) = \dfrac{1}{6}$.
    ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\kappa \in (0,1]$ ώστε $f(\kappa) = \eta\mu\dfrac{\kappa}{6} + \kappa^6$.
18. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ώστε να ικανοποιεί τις συνθήκες $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1} = 4$ και $4\eta\mu(x-2) \leqslant (x-2)f(x) \leqslant x^2 - 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η

γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f τέμνει την γραφική παράσταση της παραβολής $y = x^2 - x + 1$ σε σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(1, 2)$.

19. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, και $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\kappa \in (\alpha, \beta)$ ώστε $15f(\kappa) = f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3) + 4f(x_4) + 5f(x_5)$.

20. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in [\alpha, \beta]$ ώστε $f(\theta) = \frac{1}{9}\left[2f(\alpha) + 3f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + 4f(\beta)\right]$.

21. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $\rho_1, \rho_2 \in (\alpha, \beta)$ δύο διαδοχικές λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

22. Έστω συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ώστε να ισχύει $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{1}{\xi - \alpha} + \frac{1}{\xi - \beta}$.

23. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\alpha > 0$. Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $z = x + if(x)$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Αν είναι $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}, f\left(\frac{3\alpha}{2}\right) = -\frac{\alpha}{2}$ και για κάποιο $x_0 \in (0, 2\alpha)$ ισχύει $|z - \alpha| < \alpha, |2z - \alpha| \geqslant \alpha$ και $|2z - 3\alpha| \geqslant \alpha$, να αποδείξετε ότι $f(\alpha) = 0$.

Μονοτονία

Θεώρημα

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ. Τότε ισχύουν:

- Η f είναι αύξουσα στο Δ, αν και μόνο αν $f'(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
- Η f είναι φθίνουσα στο Δ, αν και μόνο αν $f'(x) \leqslant 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ είναι:

- $f'(x) > 0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
- $f'(x) < 0$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Παρατήρηση

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, τότε δεν προκύπτει ότι $f'(x) > 0$.

Για παράδειγμα η συνάρτηση f με $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η παράγωγος της όμως μηδενίζεται για $x = 0$ εφόσον $f'(x) = 3x^2$.

Πρόταση

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και είναι γνησίως αύξουσα στο Δ (ή γνησίως φθίνουσα στο Δ) τότε ισχύει $f'(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in \Delta$ (ή $f'(x) \leqslant 0$ για κάθε $x \in \Delta$).

Θεώρημα

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ. Αν είναι $f'(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in \Delta$ και δεν υπάρχει διάστημα $I \subseteq \Delta$ ώστε $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in I$, (δηλαδή η ισότητα $f'(x) = 0$ επαληθεύεται μόνο για μεμονωμένα σημεία του Δ) τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
Αντίστοιχα αν είναι $f'(x) \leqslant 0$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Πρόταση

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

Πρόταση

Αν f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ (ή $f'(x) < 0$), τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$).

Πόρισμα

Έστω f συνεχής στο $[\alpha.\beta]$ και παραγωγίσιμη στο $(\alpha, \gamma) \cup (\gamma, \beta)$ όπου $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Αν είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \gamma) \cup (\gamma, \beta)$ (ή $f'(x) < 0$), τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$).

Παρατήρηση

Τονίζεται ότι για την χρήση των παραπάνω θεωρημάτων - προτάσεων, απαιτείται το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι διάστημα. Αν η f ορίζεται σε ένωση διαστημάτων, την μελετούμε ως προς την μονοτονία σε κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

Ακρότατα

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_0

- τοπικό μέγιστο, αν και μόνο αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \Delta$ με $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f(x) \leqslant f(x_0)$.
- τοπικό ελάχιστο, αν και μόνο αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \Delta$ με $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Το $f(x_0)$ που είναι τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο, ονομάζεται τοπικό ακρότατο και το x_0 θέση τοπικού ακροτάτου.

Παρατηρήσεις

- Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το ολικό μέγιστο και το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα είναι το ολικό ελάχιστο.
- Είναι δυνατόν ένα τοπικό μέγιστο να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.
- Θέσεις πιθανών ακροτάτων είναι τα κρίσιμα σημεία της f και τα κλειστά άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της f.

Σχόλιο

Στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f στο οποίο η f παρουσιάζει ασυνέχεια ελέγχουμε την ύπαρξη τοπικού ακρότατου συγκρίνοντας τα $f(x_0), \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

Θεώρημα Fermat

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Παρατηρήσεις

Αν ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f είναι θέση ακρότατου και υπάρχει η παράγωγος της f στο x_0, τότε η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ παράλληλη προς τον άξονα x'x.

Πόρισμα

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και ισχύει $f'(x_0) \neq 0$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι ακρότατο της f.

Ασκήσεις

1. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει $f'(x) > (1-x)f''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

2. Δίνεται συνάρτηση $f:[0,10] \to (-1, +\infty)$ παραγωγίσιμη στο $[0,10]$, τέτοια ώστε να ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,10)$ και επιπλέον $f(1) = 0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g με $g(x) = \dfrac{f^2(x)}{1+f(x)}$. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

3. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, καθώς και συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \dfrac{x}{f(x)}$ ώστε να ισχύει $g(x)f'(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να εξετάσετε την συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία.

4. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει:

   i. $f(x) > f'(x)$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

ii. $f(x) < f'(x)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση g με $g(x) = e^x f(-x)$.

5. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

i. $εφx + ημx > 2x$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$.

ii. $εφx \cdot ημx > x^2$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$.

iii. $κ \cdot εφx + ν \cdot ημx > (κ + ν) \cdot x$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$, όπου $κ, ν \in \mathbb{N}^*$ με $κ > \frac{ν}{2}$.

6. Να αποδείξετε την ανισότητα $κx + λxσυνx > (κ + λ)ημx$, για κάθε $x \in (0, π)$, όπου $κ > 2λ > 0$.

7. i. Να αποδείξετε ότι $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x + 1}$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

ii. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση f με $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, όπου $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

8. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \left(\frac{α}{β}\right)^x - κ^x + \frac{κβ - α}{β}$, όπου $β > α > 0$ και $κ > 1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $βα^x + (κβ - α)β^x = β(κβ)^x$, έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

9. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $2f(x) + 3f(1 - x) = 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και στη συνέχεια να επιλύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ στο $\mathbb{R}$.

10. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (α, +\infty)$ όπου $α > 0$, έτσι ώστε να ισχύει $\left[f'(x)\right]^2 = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερός αριθμός c ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(x) = \frac{(x + c)^2}{2}$.

ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

11.

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση f με τύπο $f(x) = α^x + \ln αx$, όπου $0 < α \neq 1$.

ii. Να βρείτε το $λ \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $α^{λ(λ-2)} - α^{λ-2} = (λ - 2)(1 - λ)\ln α$.

12. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $2f(x) + 3f(1 - x) = 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και στη συνέχεια να επιλύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $f(x) = 0$.

13. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (\alpha, +\infty)$, όπου $\alpha > 0$, έτσι ώστε να ισχύει $\left[f'(x)\right]^2 = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

    i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερός αριθμός c ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(x) = \dfrac{(x+c)^2}{2}$.

    ii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

14. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $f(x) = \ln\dfrac{x(x+1)}{2}$.

    i. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

    ii. Οι εφαπτόμενες ευθείες στα σημεία $A(1, f(1))$ και $B(0, f^{-1}(0))$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, f^{-1} τέμνονται πάνω στην ευθεία $y = x$.

15. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, τέτοια ώστε να ισχύει $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν είναι γνωστό ότι συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(x) + x^2 - 2(\alpha + \beta)x$ παρουσιάζει στο σημείο $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ τοπικό ακρότατο, να αποδείξετε ότι $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\beta) > \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{2}$.

16. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως μονότονη.

17. Έστω συνάρτηση $f:[0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ συνεχής στο $[0,1]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,1)$. Αν για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει $x^2 f''(x) \ln x = f(x) - 2xf'(x)$ και επιπλέον $f(1) < f(0)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x) = f(x)\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$.

18. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, τέτοια ώστε να ισχύει:

    i. $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

    ii. $f'(\alpha) = f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $f'(\beta) = -f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

    Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

19. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,3]$, τέτοια ώστε συνάρτηση f'' να είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,3]$. Δίνεται επίσης στο $f'(1) = f'(2) = -f'(3)$ και $f'(1) > 0$. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση f.

20. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) > 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία ε με εξίσωση $y = 2x + 3$ σε ακριβώς ένα σημείο.

21. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_x = x + if'(x), x \in \mathbb{R}$. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\mathrm{Re}(z_0 z_1) > 0$, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση f. Δίνεται $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

22. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_x = x + i\left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ και $w_x = x + i\ln(x+1)$, όπου $x > 0$. Να αποδείξετε ότι $\text{Im}(w_x) > \text{Im}(z_x)$ για κάθε $x > 0$.

23. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$ και οι ευθείες $\varepsilon(t){:}\ f(t)x - f(1-t)y + \kappa = 0$ και $\eta(t){:}\ f''(t)x + y + \lambda = 0$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ σταθερές και $t \in [0,1]$. Αν για κάθε $t \in [0,1]$ οι ευθείες $\eta(t)$ έχουν συντελεστή διεύθυνσης διάφορο του μηδενός και οι ευθείες $\varepsilon(t)$ συντελεστή διεύθυνσης ίσο με ένα, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση f στο διάστημα $[0,1]$. Δίνεται ότι το $f(0)$ είναι τοπικό μέγιστο.

24. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f με $f(x) = e^{|x|}\text{συν}x$ με πεδίο ορισμού το $(-\pi, \pi)$.

25. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατο.

26. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha) < f(\beta)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[f(\alpha), f(\beta)]$.

27. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha) = \alpha, f(\beta) = \beta$ και $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2\beta$ ώστε η εξίσωση $f'(x) = 0$ να έχει μοναδική λύση την $x_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της f.

28. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $e^{f(x)} \geqslant \alpha f(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 0$, να βρείτε τον αριθμό α.

29. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το σύνολο των μιγαδικών αριθμών της μορφής $z_x = x + if(x)$. Αν ισχύει $|z_x| \geqslant 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι $f(0) = 1$, να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$.

30. Έστω ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $x^{\sqrt{x}} \geqslant \alpha x - \alpha + 1$. Να υπολογίσετε το α.

31. Έστω συνάρτηση $f{:}\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - \alpha x - \beta$, η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f στο σημείο $K(2, f(2))$ περνά από το σημείο $A(0,2)$. Να προσδιορίσετε τα α, β.

32. Έστω συνάρτηση f με $f(x) = e^x(x^2 + \alpha x + \alpha^2)$. Αν η f έχει δύο τοπικά ακρότατα, να αποδείξετε ότι $|\alpha| < \frac{2}{\sqrt{3}}$.

33. Δίνεται η μη σταθερή συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και $f(\alpha) = f(\beta)$. Αν $\ln f(x) + e^{f(x)} \leqslant 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και η ισότητα ισχύει για κάποιο $x_0 \in (\alpha,\beta)$, να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

34. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,3]$, ώστε να ισχύει $f(0) = f(3) < f(2)$ και επιπλέον το σημείο $x_0 = 1$ να είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f'(x) = 0$ στο

διάστημα $(0,3)$. Να αποδείξετε ότι το $f(1)$ είναι η μέγιστη τιμή και το $f(0) = f(3)$ είναι η ελάχιστη τιμή της f.

35. Δίνονται συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και επιπλέον η f' είναι 1−1. Υποθέτουμε ότι ισχύει $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι οι συναρτήσεις f και $f \circ g$ παρουσιάζουν ακρότατο στο σημείο 1. Να αποδείξετε ότι $g(1) = 1$.

36. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 2x + 5$ και μια συνάρτηση g η οποία είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $f \circ g$ παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι $g(1) = 1$.

37. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[-\alpha, \alpha]$ ώστε να ισχύει $(x^2 - \alpha^2)f'(x) + f(x) = 0$, για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο $[-\alpha, \alpha]$.

38. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ανοιχτό διάστημα Δ και $K(\alpha, \beta)$ σταθερό σημείο του καρτεσιανού επιπέδου. Αν M_0 το πλησιέστερο σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f προς το K, να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη ευθεία ε της C_f στο M_0 είναι κάθετη προς την ευθεία M_0K.

Θεώρημα Rolle

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β)
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

Γεωμετρική Ερμηνεία

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις το Θεωρήματος Rolle, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

Σχόλιο

Όταν η παράγωγος μιας συνάρτησης f μηδενίζεται σ' ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f δεν σημαίνει ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle.

Ασκήσεις

1. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ ώστε να ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο (α, β) ή ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια λύση τουλάχιστον στο (α, β).

2. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma$. Αν ισχύει $2f(\beta) = f(\alpha) + f(\gamma)$ και $f^2(\beta) = f(\alpha)f(\gamma)$ να αποδείξετε ότι η f έχει δύο τουλάχιστον θέσεις πιθανών τοπικών ακροτάτων στο (α, β).

3. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\alpha < f(x) < \beta$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $f'(x) \neq 1$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία με εξίσωση $y = x$ σε ένα ακριβώς σημείο.

4. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[1, e]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, e)$ ώστε να ισχύει $f(1) - f(e) = e^2 - 3e + 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f'(\theta) = \dfrac{1 + 3\theta - 2\theta^2}{\theta}$.

5. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\left[f(\beta) - f(\alpha)\right]\xi^{\nu-1} = \dfrac{\beta^\nu - \alpha^\nu}{\nu} f'(\xi)$.

6. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, όπου $0 < \alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi) = \nu f(\xi)$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^*$, $g:[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^*$ παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$ με $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, $f(\alpha) = 2$, $f(\beta) = 5$, $g(\alpha) = 4$, $g(\beta) = 10$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\left(\ln|f(\theta)|\right)' = \left(\ln|g(\theta)|\right)'$.

8. Δίνεται συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $2g(x) + 4xg'(x) + x^2g''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(0) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μια λύση στο $\mathbb{R}^*$.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες και παραγωγίσιμες στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, με $f(\alpha) - g(\alpha) = 3$, $f\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right) - g\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right) = -1$ και $f(\beta) - g(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε οι εφαπτόμενες ευθείες στις γραφικές παραστάσεις των f και g στα σημεία $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ και $B\left(x_0, g(x_0)\right)$ να είναι παράλληλες.

10. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha < \beta$ και $f'(\alpha) = f(\beta)$, $f'(\beta) = f(\alpha)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ το οποίο είτε είναι κρίσιμο της f, είτε είναι τέτοιο ώστε $f''(\xi) + f(\xi) = 0$.

11. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) + f(x_2) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\theta) = \dfrac{2g(\theta)g'(\theta)}{f(x_1) + f(x_2)}$.

12. Έστω f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,4]$. Αν $f(1)=1, f(2)>2, f(3)<3$ και $f(4)=4$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in (1,4)$ τέτοιο ώστε $f''(\theta)=0$.

13. Δίνονται οι συναρτήσεις f, h δύο φορές παραγωγίσιμες στο $[\alpha,\beta]$ ώστε να ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=h(\alpha)=h(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in (\alpha,\beta)$ υπάρχει $\theta \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\theta)h(\lambda)=f(\lambda)h''(\theta)$.

14. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο(α,β) με $e^{\frac{\lambda}{\kappa}\alpha}f(\alpha)=e^{\frac{\lambda}{\kappa}\beta}f(\beta), \lambda,\kappa \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\kappa f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$.

15. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και α, β θέσεις τοπικών ακροτάτων της f με $\alpha<\beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\kappa f''(\xi)+\lambda f'(\xi)=0$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$.

16. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες και συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)$ και $g(\alpha)=g(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος (κ,λ) μη μηδενικών πραγματικών αριθμών, υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $\kappa f'(\xi)=\lambda f(\xi)g'(\xi)$.

17. Έστω $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}_+^*$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\ln(f(\alpha))-\ln(f(\beta))=\beta-\alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\theta)=-f(\theta)$.

18. Έστω $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}_+^*$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\ln(f(\alpha))-\ln(f(\beta))=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f'(\theta)}{f(\theta)}=2\theta$.

19. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ έτσι ώστε $f(\alpha)f(\beta)<0, f(\gamma)=0$. Δίνεται επίσης ότι στο σημείο $x_0=\delta$ η f παρουσιάζει μέγιστο. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in (\alpha,\delta)$ έτσι ώστε $f''(\theta)=\left(f'(\theta)\right)^2$.

20. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\dfrac{2\alpha}{3}+\beta\ln 2=0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha\sqrt{x-1}=-\dfrac{\beta}{x}$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(1,2)$.

21. Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε $\alpha+3\beta+3\gamma=0$. Να αποδείξετε ότι $\beta^2 \geqslant \alpha\gamma$.

22. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x+2)^2=2x\ln x$ έχει το πολύ μια λύση πραγματική.

23. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^3-3x^2-12x+6\lambda=0$ με $-\dfrac{7}{6}<\lambda<\dfrac{20}{6}$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(-1,2)$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ καθώς και τα σύνολα των μιγαδικών αριθμών $A=\{x+if(x), x \in \mathbb{R}\}, B=\{x+if'(x), x \in \mathbb{R}\}$. Αν η τομή $A \cap B$ αποτελείται από 2 στοιχεία, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ ώστε οι αριθμοί $f(\theta), f'(\theta), f''(\theta)$ να ικανοποιούν τη σχέση $\left(f'(\theta)\right)^2=f(\theta)f''(\theta)$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ καθώς και το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $A = \{e^x + if(x), x \in \mathbb{R}\}$. Αν οι μιγαδικοί $\kappa(1+i), \lambda(1+i)$ ανήκουν στο A, όπου $\kappa, \lambda > 0$ με $\kappa \neq \lambda$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(\theta) = f'(\theta)$.

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει $f'(x_0) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

Πόρισμα

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και συνεχής στο (α, β). Τότε για κάθε $x \in (\alpha, \beta]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, x)$ ώστε $f(x) - f(\alpha) = (x - \alpha)f'(\xi)$.

Παρατήρηση

Οι συνθήκες συνέχειας στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγισιμότητας στο (α, β) είναι ικανές για την εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, όχι όμως και αναγκαίες.

Μεθοδολογίες

- Όταν θέλουμε να αποδείξουμε μια σχέση στην οποία παρουσιάζονται περισσότεροι του ενός παράγωγοι αριθμοί $(f'(\xi_1), f'(\xi_2), \dots)$ χωρίζουμε το αρχικό διάστημα σε κατάλληλα υποδιαστήματα, ανάλογα με τα δεδομένα του ζητήματος και διαδοχικά εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής.
- Όταν θέλουμε να αποδείξουμε μια σχέση στην οποία παρουσιάζεται παράγωγος αριθμός ανώτερης τάξης $f^{(\kappa)}(\xi)$, χωρίζουμε το αρχικό διάστημα σε κατάλληλα υποδιαστήματα και εφαρμόζουμε για τις συναρτήσεις $f', f'', f''', \dots$ διαδοχικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής ή το Θεώρημα Rolle.
- Όταν έχουμε κάποιες πληροφορίες για την παράγωγο συνάρτηση f', με βάση το Θεώρημα Μέσης Τιμής, τις μεταφέρουμε στην παράσταση $\dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ ή στην $\dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ και λαμβάνουμε συμπεράσματα για κάποιες εικόνες της f ή για την συνάρτηση f γενικότερα.
- Όταν θέλουμε να αποδείξουμε μια σχέση της μορφής $m \leqslant \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \leqslant M$, αντικαθιστούμε το $\dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ με $f'(\xi)$ χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής και στη συνέχεια αποδεικνύουμε τη σχέση $m \leqslant f'(\xi) \leqslant M$.

Ασκήσεις

1. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(\alpha + 1) = ef(\alpha)$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \alpha + 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = f(\xi)$.

2. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,2]$, παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f(0)=0, f(2)=3$ και $f^2(1)-1=3f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,2)$ τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες ευθείες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία $(\xi_1, f(\xi_1))$ και $(\xi_2, f(\xi_2))$ να τέμνονται κάθετα.

3. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Έστω επίσης ότι η εφαπτόμενη ευθεία ε στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ της γραφικής παράστασης c_f της συνάρτησης f τέμνει την c_f και στο σημείο $B(\beta, f(\beta))$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f' δεν είναι 1−1.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^x(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$, όπου $8\alpha^2+\beta^2-4\alpha\gamma<0$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ευθεία η οποία να τέμνει την γραφική παράσταση της f σε 3 σημεία.

5. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[1,3]$, παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ με $f(1)=\kappa, f(2)=\kappa+1$ και $f(3)=\kappa$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

6. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa, \nu \in \mathbb{N}^*$ υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $\kappa f'(\xi_1)+\nu f'(\xi_2)=(\kappa+\nu)\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

7. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=\dfrac{f(\beta)}{\beta}=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\theta_1, \theta_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\theta_1)+f'(\theta_2)=\beta-1$.

8. Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) ώστε $|f(\alpha)| \neq |f(\beta)|$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.
   i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{2}{f(x)}=\dfrac{1}{f(\alpha)}+\dfrac{1}{f(\beta)}$ έχει τουλάχιστον μια λύση ρ στο διάστημα (α,β).
   ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\theta_1, \theta_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $(\alpha-\rho)f'(\theta_1)-f(\alpha)=(\beta-\rho)f'(\theta_2)-f(\beta)$.

9. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[-2,2]$ με $f(-2)=-2$ και $f(2)=2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-2,2)$ τέτοια ώστε $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=2$.

10. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha) \neq f(\beta)$.
    i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $3f(\gamma)=f(\alpha)+2f(\beta)$.
    ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_1)(\gamma-\alpha)=2f'(x_2)(\beta-\alpha)$.

11. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) τέτοια ώστε $f(\alpha)=\beta$ και $f(\beta)=\alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=1$.

12. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa,\lambda,\mu \in \mathbb{N}^*$ υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $\kappa f'(\xi_1)+\lambda f'(\xi_2)+\mu f'(\xi_3)=(\kappa+\lambda+\mu)\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

13. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,9]$ με $f(1)+f(9)=2f(5)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,9)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

14. Έστω f συνάρτηση τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $\gamma \in (\alpha,\beta)$. Αν $f'(\alpha)\cdot f'(\beta)\neq 0$ και $\dfrac{f'(\alpha)}{f'(\beta)}=\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'''(\xi)=0$.

15. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,3]$. Αν $2f(2)-f(1)-f(3)=2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=-2$.

16. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=\alpha$ και $0<f'(x)<1$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$, να αποδείξετε ότι $\alpha<f(\beta)<\beta$.

17. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $\gamma \in (\alpha,\beta)$. Αν ισχύει $|f''(x)|<\theta$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$, να αποδείξετε ότι $f'(\alpha)+f'(\beta)<\theta(\beta-\alpha)$.

18. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x)>x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+1$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

19. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\frac{13\pi}{8}+\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{\pi}{18}$.

20. Να αποδείξετε ότι $6+\frac{1}{14}<\sqrt{37}<6+\frac{1}{12}$.

21. Να αποδείξετε ότι $1-\frac{1}{x}\leqslant \ln x \leqslant x-1$, για κάθε $x>0$.

22. Έστω f συνεχής στο $[1,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,5)$. Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,3)$ και γνησίως αύξουσα στο $(3,5)$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(5)-f(1)$ και $2\big(f(4)-f(2)\big)$.

23. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν κ το πλάτος του διαστήματος $f([\alpha,\beta])$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $|f'(\theta)|\leqslant \frac{\kappa}{\beta-\alpha}$.

24. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $f'(\alpha)>0, f'(\beta)>0$ και $\big(f(\beta)-f(\alpha)\big)(\beta-\alpha)<0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α,β).

25. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ καθώς και οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής $z_x = x + if(x), w_x = x + if'(x)$ όπου $x \in [\alpha, \beta]$. Αν ισχύει $Im(z_\alpha) = Im(z_\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\theta_1, \theta_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $w_{\theta_1} + w_{\theta_2} = \overline{w_{\theta_1} + w_{\theta_2}}$.

26. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β), με $f(\alpha) = \alpha$ και $f(\beta) = \beta$. Δίνεται επίσης το σύνολο των μιγαδικών αριθμών της μορφής $z_x = 1 + if'(x)$, όπου $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $z_{x_1} + z_{x_2} = 2(1 + i)$.

Συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής

Πρόταση

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $f'(x) = 0$, τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση στο διάστημα Δ.

Πρόταση

Έστω f και g συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς σ' ένα διάστημα Δ. Αν για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $f'(x) = g'(x)$, τότε υπάρχει σταθερός αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

Παρατήρηση

Αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f δεν είναι διάστημα αλλά ένωση διαστημάτων, η εφαρμογή των παραπάνω προτάσεων γίνεται για την f σε κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

Ορισμός

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Ονομάζουμε παράγουσα συνάρτηση f, η αρχική συνάρτηση f, ή αντιπαράγωγο της f, στο διάστημα Δ, κάθε συνάρτηση F ορισμένη και παραγωγίσιμη στο Δ για την οποία ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Πρόταση

Αν υπάρχει μια αρχική συνάρτηση F της f σ' ένα διάστημα Δ, τότε υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις της μορφής $F + c$, $c \in \mathbb{R}$, αρχικές της f.

Ασκήσεις

1. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $|f(\alpha) - f(\beta)| \leqslant (\alpha - \beta)^6$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

2. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ και $f'(x) = 4f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω συνάρτηση g που ικανοποιεί τη σχέση $g(x) = f(x)f(1-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της.

3. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε να ικανοποιεί τις συνθήκες $f(0) = 1, f'(0) = 0$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x) = \ln\left[(f(x))^2 + (f'(x))^2\right]$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R}_+^* \to (1, +\infty)$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}_+^*$. Επίσης ισχύει $f'(x) = \frac{f(x)}{\ln f(x)}$ και $g'(x) = -\frac{g(x)}{\ln g(x)}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h με τύπο $h(x) = \ln^2 f(x) + \ln^2 g(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}_+^*$.

5. Δίνονται συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι ισχύει $f(x)g'(x) - f(x)g(x) = f'(x)g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\frac{f(1)}{g(1)} = \frac{1}{e}$. Να αποδείξετε ότι
   i. Η συνάρτηση h με τύπο $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}e^x$ είναι σταθερή και να βρείτε την τιμή της.
   ii. Η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

6. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $3f^5(x) + 2[f'(x)]^2 f''(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = 0$ και $f'(0) = 0$, να αποδείξετε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7. Δίνεται συνάρτηση f τέτοια ώστε να ικανοποιεί τις σχέσεις $f(1) = 0$ και $f(x) - f(y) = \kappa\eta\mu^2(x - y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του κ.

8. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει $f'(1-x)f(x) = \kappa$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου κ σταθερά. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x) = f(x)f(1-x)$ είναι σταθερή και να προσδιορίσετε τον τύπο της, αν είναι γνωστό ότι $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

9. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, τέτοια ώστε να ισχύει $f''(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και $f'(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \kappa\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ όπου κ σταθερά.

10. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ καθώς επίσης $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

11. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, για την οποία η εφαπτομένη που άγεται από το τυχαίο σημείο Μ της γραφικής παράστασης της C_f τέμνει

τους άξονες x'x και y'y στα σημεία A και B αντίστοιχα, έτσι ώστε το M να είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB.

12. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν ισχύει $xf'(x) = f(x)\ln f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επιπλέον $f(2) = e, f(-2) = e^{-1}$, να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

13. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει $f''(x) + \alpha^2 f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha \neq \pm 1$. Υποθέτουμε επίσης ότι ισχύει $f(0) = \kappa$ και $f'(0) = \lambda\alpha$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \kappa\,\text{συν}(\alpha x) + \lambda\,\text{ημ}(\alpha x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

14. Δίνονται συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες $f'(x) + g'(x) - g(x) = 2x - \frac{3}{2}$ και $2f'(x) + 2g'(x) + g(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν επιπλέον ισχύει $f(0) = 0$, να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις f και g.

15. Δίνεται συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_+^*$, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες $g'(\ln x) = x\,\text{ημ}x + x^2\text{συν}x$ για κάθε $x > 0$ και $g(0) = 2\text{ημ}1$. Να υπολογίσετε το $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

16. Δίνεται συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει $e^x g'(x) = \text{συν}x - \text{ημ}x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(0) = 0$. Να υπολογίσετε το $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

17. Δίνεται συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες $g'(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} - 3$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $g(1) = 2$. Να βρείτε τον τύπο της g.

18. Αν f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και η f' είναι άρτια συνάρτηση, να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

19. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η f' είναι περιττή συνάρτηση και υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ώστε $f(-\alpha) = f(\alpha)$, να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια συνάρτηση.

20. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι τρεις φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f''' = g'''$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε επίσης ότι ισχύει $f''(0) - g''(0) = 2$, $f'(1) = g'(1)$ και $f(1) = g(1)$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

21. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $3x^2(x - y) \leqslant f(x) - g(y) \leqslant x^3 - y^3$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

    i. Να αποδείξετε ότι $f = g$.

    ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

22. Έστω συναρτήσεις f, g δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε επίσης ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις σχέσεις $f'(1) = g'(1)$, $f(2) - g(2) = -3$ και $f''(x) = g''(x) + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) - g(x) = x^2 - 2x - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Αν η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο λύσεις ρ_1, ρ_2 τέτοιες ώστε $-1 < \rho_1 < 3 < \rho_2$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (ρ_1, ρ_2).

23. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x) = \lambda f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά, αν και μόνο αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) = ce^{\lambda x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

24. Έστω f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις με $f'(x) = \lambda f(x)$ και $g'(x) = \lambda g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = cg(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δίνεται $f(0)g(0) \neq 0$.

25. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ και επιπλέον $f'(x)f(1-x) = e$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{e\left(x - \frac{1}{2}\right)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

26. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$, ώστε να ισχύει $f(x+y) = ef(x)f(y)$ για κάθε x, y $\in \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ και ισχύει $f'(0) = e$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον τύπο της.

27. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των f και g, αν γνωρίζουμε ότι ισχύει $f'(x)g(x) = f(x)\left(g'(x) + g(x)\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = g(0)$.

28. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = g'(x)f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν $f(x) = ce^{g(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου c σταθερά.

29. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f'(x) = \left(3x^2 + 6x + 3\right)f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επιπλέον $f(0) = 1$. Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης f.

30. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει $(2x-3)f(x) = f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι $1-1$.

31. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής $z_x = 1 + if'(x), w_x = 1 + if(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $z_x w_{-x} \in \mathbb{I}$ και $w_0 = 1 + i$, να αποδείξετε ότι $z_x = w_x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

32. Δίνονται συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής $z_x = f(x) + ig(x), w_x = f'(x) + ig'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $w_x + iz_x = 0$ και $z_0 = 2$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των αριθμών z_x στο μιγαδικό επίπεδο.

33. Δίνονται συναρτήσεις f, g δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς της μορφής $z_x = f''(x) + ig''(x)$,

$w_x = f(x) + ig(x)$ και $v_x = f'(x) + ig'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $z_x + h(x)w_x = 0$ και $w_0 = 0$, να αποδείξετε ότι $w_x\overline{v_x} \in \mathbb{R}$.

34. Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_x = 2f(x) + if'(x)$, $w_x = 2g(x) + ig'(x)$ όπου $x \in \mathbb{R}$. Αν είναι $\mathrm{Re}(z_x) = \mathrm{Im}(z_x) > 0$, και η ευθεία με εξίσωση $2x - y + 1 = 0$ είναι κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων C_f, C_g των f, g στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$, να αποδείξετε ότι $z_x = w_x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης να βρείτε τον μιγαδικό z_ξ, του οποίου το μέτρο ισούται με $2\sqrt{2}\,e^{2\sqrt{2}}$.

35. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και λ ένας πραγματικό αριθμός ώστε $f'(0) = 0$ και $f''(x) + 2\lambda f'(x) + \lambda^2 f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δίνεται επίσης η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = e^{\lambda x} f(x)$. Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων f και g, αν για τον μιγαδικό αριθμό $z = f(0) + ig(0)$ ισχύει $f(0) = g(0) > 0$ και $|z| = \sqrt{2}$.

Επαναληπτικές Ασκήσεις Θεωρημάτων

1. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[2,3]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $3f(2)=2f(3)-6$. Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $g:[2,3]\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}-x$ έχει την ιδιότητα: $g(2)=g(3)$.

ii) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(2,3)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο ξ να διέρχεται από το σημείο $M(0,-\xi^2)$.

2. Θεωρούμε τον πραγματικό αριθμό α και τη δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ώστε $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(\alpha+x)=f(\alpha+1)-f(\alpha)$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

3. Έστω οι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f'(1)=f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $x_0 f''(x_0)=f(0)$.

4. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to(0,1)$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει $\rho\in(0,1)$ έτσι, ώστε $f(\rho)=\rho$.

ii) υπάρχει $\xi\in(0,\rho)$ έτσι, ώστε $f'(\xi)=1-\dfrac{f(0)}{\rho}$.

5. Η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=e^x$ σε τρία διαφορετικά σημεία. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$, ώστε $f''(\xi)=f(\xi)$.

6. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f(1)=0$ και η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=f(\xi)$.

7. **A.** Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β).

α) Αν $g(\alpha)\neq g(\beta)$, να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}\big(g(x)-g(\alpha)\big)$$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $\left(f(\beta)-f(\alpha)\right)g'(\xi)=\left(g(\beta)-g(\alpha)\right)f'(\xi)$.

Β. Έστω η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $\alpha,\beta>0$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi)-\xi f'(\xi)=\frac{\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{\beta-\alpha}.$$

8. Έστω οι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

9. α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(t)=\text{συν}t$.

Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει $\xi\in(0,x)$, ώστε $\frac{1-\text{συν}x}{x}=\text{ημ}\xi$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

ii) $x\text{ημ}x+\text{συν}x>1$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι: $(x+1)\text{συν}\left(\frac{\pi}{x+1}\right)-x\text{συν}\left(\frac{\pi}{x}\right)>1$ για κάθε $x\geq 2$.

10. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(0)=0$, $f(1)=1$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύουν:

α) $f(x)<x$ β) $f(x)<xf'(x)$

11. Οι συναρτήσεις f,g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $[0,1]$, ώστε να είναι $f(0)=g(0)$ και $1\leq f'(x)\leq 4$, $2\leq g'(x)\leq 3$ για κάθε $x\in[0,1]$.
Να αποδείξετε ότι:

i) $|f(1)-g(1)|\leq 2$.

ii) υπάρχουν $x_0,x_1\in(0,1)$ ώστε $|f''(x_1)-g''(x_0)|\leq 4$.

12. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις $f(0)=1$ και $f(1)=f'(1)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$, ώστε να είναι $f''(x_0)=2$.

13. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$, $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Αν M η μέγιστη τιμή της f στο $[\alpha,\beta]$, να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1)-f'(\xi_2)\geq\frac{4M}{\beta-\alpha}.$$

14. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(0)=0$ και $f(\alpha)=\alpha$.

i) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\alpha)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=\alpha-\xi$.

ii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\alpha)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1\in(0,\xi)$ και $\xi_2\in(\xi,\alpha)$ τέτοια, ώστε να είναι

$$f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1.$$

15. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Αν ισχύει $f'(0)<0<f'(1)$, να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει $x_0\in(0,1)$, ώστε $f'(x_0)=0$.

β) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$ τέτοια, ώστε: $\dfrac{f'(0)}{f''(\xi_1)}-\dfrac{f'(1)}{f''(\xi_2)}=-1$.

16. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $f(1)=2$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει $x_0\in(0,1)$, ώστε $f(x_0)=1$.

ii) υπάρχουν $x_1\in(0,x_0)$ και $x_2\in(x_0,1)$ τέτοια, ώστε

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=1.$$

17. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(1,2005)$ και $B(-2,1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία

$\varepsilon:\ y=-\dfrac{1}{668}x+2005$.

18. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και ισχύουν $f(0)=0$ και $f'(1)=f(1)$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει $\xi \in (0,1)$, ώστε $f'(\xi)=f(1)$.

ii) υπάρχει $x_0 \in (0,1)$, ώστε $f''(x_0)=0$.

19. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ώστε $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία της C_f στο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη C_f εκτός του M.

20. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma,\delta\in(\alpha,\beta)$ έτσι, ώστε $f(\gamma)\cdot f(\delta)<0$, να δείξετε ότι:

i) υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα (α,β).

ii) υπάρχουν σημεία $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1)>0$ και $f''(\xi_2)<0$.

iii) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

21. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=0$ και $f'(x)e^{f(x)}=1$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln x$.

22. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)=1$ και $2xf(x)+(x^2+1)f'(x)=e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε τον τύπο της f.

23. α) Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(x)+f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και είναι $f(0)=f'(0)=1$ και $f''(x)+f(x)=0$, Να αποδείξετε ότι $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

24. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, Αν σε κάθε σημείο $M(x_0,f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f, η κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο M διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να βρείτε τον τύπο της f.

25. Να προσδιορίσετε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\left(\dfrac{f(x)}{x^2+1}\right)' = f(x)$.

26. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)-\{1\}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

$f(x) = x\ln x\, g'(x)$ και $g(x) = -x\ln x\, f'(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)-\{1\}$.

α) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

$$\big(f(x)+g(x)\big)\ln x \quad \text{και} \quad \frac{f(x)-g(x)}{\ln x}.$$

β) Να βρείτε τους τύπους των f και g.